Topologie, Analyse Fonctionnelle

notes de cours

Table des matières

Chapitre 1

Vocabulaire

1.1 Distances et normes

Définition 1.1.1 *Une* **distance** *sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(1) $d(a,b) = d(b,a)$ pour tous $a, b \in E$;
(2) $d(a,b) = 0$ si et seulement si $a = b$;
(3) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ pour tous $a, b, c \in E$.
Un **espace métrique** *(E, d) est un ensemble E muni d'une distance d.*

Si on interprète la distance comme un "temps de parcours", la propriété de symétrie (1) signifie que le parcours en question est entièrement réversible : il est "aussi rapide" d'aller de a vers b que de revenir en a à partir de b. La propriété (2) signifie que la distance d est suffisamment "fine" pour distinguer les points de E. L'inégalité (3) porte le nom d'**inégalité triangulaire**. Elle signifie qu'il est toujours plus rapide d'aller directement d'un point a à un point c que de passer par un point intermédiaire b.
Si a, x, y sont 3 points de E, alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a $d(x,a) - d(y,a) \leq d(x,y)$. Par symétrie, on en déduit l'**inégalité triangulaire inverse** :

$$|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y) .$$

Exemples
(1) Sur $\mathbb{R}$, la **distance usuelle** est définie par $d(x,y) = |x - y|$.
(2) Si $\mathcal{P}$ est un plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on définit une distance sur $\mathcal{P}$ en notant $d(A,B)$ la longueur du segment $[A\,;B]$. En identifiant $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$ de manière évidente, on a $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. De manière équivalente, si on identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{C}$, alors d est donnée par $d(a,b) = |b - a|$, où on a noté $|z|$ le module d'un nombre complexe z. On dit que d est la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^2$, ou encore la **distance usuelle** sur $\mathbb{C}$.
(3) Si E est un ensemble quelconque, on définit une distance sur E en posant $d(a,a) = 0$ et $d(a,b) = 1$ si $a \neq b$. On dit que d est **la distance discrète** sur X.
(4) Soit E l'ensemble de toutes les stations du métro parisien. On définit une distance sur E en notant $d(a,b)$ la longueur du plus court trajet entre a et b, exprimée en nombre de stations.

Définition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une* **norme** *sur E est une application $|| \, . \, || : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivante :*
(1) $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
(2) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ pour tous $x, y \in E$
(3) $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$ pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Un **espace vectoriel normé** *$(E, || \, . \, ||)$ est un espace vectoriel E muni d'une norme $|| \, . \, ||$.*

Il y a une évidente similarité formelle entre la définition d'une distance et les 2 premières propriétés intervenant dans la définition d'une norme. De fait, on a le résultat suivant, dont la preuve est immédiate.

Proposition 1.1.3 *Si $|| \, . \, ||$ est une norme sur un espace vectoriel E, alors on définit une distance sur E en posant $d(a, b) = ||b - a||$. On dit que d est la distance* **associée** *à la norme $|| \, . \, ||$.*

Notons que la distance associée à une norme $|| \, . \, ||$, outre le fait d'être une distance, vérifie 2 propriétés supplémentaires :
• elle est invariante par translation ($d(a + p, b + p) = d(a, b)$ pour tout $p \in E$) ;
• elle est "homogène" ($d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| \, d(a, b)$).
La deuxième propriété montre en particulier que la distance discrète sur un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ n'est *pas* associée à une norme.

Exemple 1 La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module est une norme sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2 *Normes sur $\mathbb{K}^d$*

• Si $p \in [1; \infty[$, on définit une norme $|| \, . \, ||_p$ sur $\mathbb{K}^d$ en posant

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} .$$

Pour $p = 2$, la norme $|| \quad ||_2$ sur $\mathbb{R}^d$ est la **norme euclidienne** sur $\mathbb{R}^d$.
• La norme $|| \quad ||_\infty$ sur $\mathbb{K}^d$ est définie par

$$||x||_\infty = \max \{|x_i|; \; 1 \leq i \leq n\} .$$

Exemple 3 *Espaces pré-hilbertiens*

Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\langle \; , \; \rangle$ est un produit scalaire sur H, alors on définit une norme sur H en posant

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} .$$

Une propriété importante reliant la norme et le produit scalaire est l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** : si $x, y \in H$, alors

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y|| .$$

Un espace vectoriel normé dont la norme provient d'un produit scalaire est qualifié d'espace **pré-hilbertien**. Par exemple, $(\mathbb{K}^d, || \, . \, ||_2)$ est pré-hilbertien.

Exemple 4 *Espaces de fonctions bornées*

Une partie A d'un espace vectoriel normé $(F, | \,.\, \|)$ est dite **bornée** s'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|x\| \leq C$ pour tout $x \in A$. Une fonction $f : T \to F$ est dite bornée si son image est une partie bornée de F.

• Si T est un ensemble quelconque, on note $\ell^\infty(T, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions bornées $f : T \to \mathbb{K}$. On définit une norme sur $\ell^\infty(T, \mathbb{K})$ en posant

$$||f||_\infty = \sup \{|f(t)|;\; t \in T\}\,.$$

En prenant $T = \{1; \ldots; d\}$, on retrouve la norme $||\,.\,||_\infty$ sur $\mathbb{K}^d$.
• Plus généralement, si F est un espace vectoriel normé, on note $\ell^\infty(T, F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions bornées $f : T \to F$. La norme naturelle sur l'espace $\ell^\infty(T, F)$ est la norme $||\,.\,||_\infty$ définie par $||f||_\infty = \sup\{||f(t)||;\; t \in T\}$.

Exemple 5 *Espaces L^p*

Soit $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $p \in [1; \infty[$, la norme naturelle sur l'espace de Lebesgue $L^p(T, \mu)$ est donnée par

$$||f||_p = \left(\int_T |f(t)|^p \, d\mu(t) \right)^{1/p}\,.$$

Pour $p = \infty$, la norme naturelle sur $L^\infty(T, \mu)$ est donnée par

$$||f||_\infty = \text{supess}\, \{|f(t)|;\; t \in T\}\,,$$

où “supess” est la borne supérieure essentielle. Pour $p = 2$, la norme provient du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}\, d\mu(t)\,.$$

Deux cas particuliers importants sont à isoler :
• Lorsque $X = \{1; \ldots; d\}$ et que μ est la mesure de décompte, $L^p(T, \mu)$ s'identifie à $\mathbb{K}^d$ et on retrouve la définition de $||\,.\,||_p$ donnée plus haut.
• Lorsque $T = \mathbb{N}$ et que μ est à nouveau la mesure de décompte, alors les espaces $L^p(T, \mu)$ s'identifient à des espaces de suites : pour $p < \infty$, on a

$$L^p(\mathbb{N}, \mu) \simeq \ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\; \sum_0^\infty |x_n|^p < +\infty \right\}\,,$$

et pour $p = \infty$, on a

$$L^\infty(\mathbb{N}, \mu) \simeq \ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\; \sup_n |x_n| < +\infty \right\}.$$

Pour $p = 2$, la norme provient donc du produit scalaire défini par

$$\langle x, y\rangle = \sum_0^\infty x_n \overline{y}_n\,.$$

Notons enfin que l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est rien d'autre que l'espace des fonctions bornées $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$!

1.2 Convergence ; continuité

1.2.1 Suites convergentes

Définition 1.2.1 *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n) de points de E* **converge** *vers un point $a \in E$ si $d(x_n, a)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Autrement dit, (x_n) converge vers x si et seulement si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geq N \;\; d(x_n, a) < \varepsilon\,.$$

La définition est donc formellement identique à celle de la convergence d'une suite de nombres réels : on remplace simplement "$|x_n - a|$" par "$d(x_n, a)$".

Remarque 1 *Comme dans le cas des suites numériques, une suite ne peut pas converger simultanément vers deux points différents. Il n'y a donc aucune ambiguité à dire que a est* la *limite de la suite (x_n), et à écrire $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Preuve. Supposons qu'une suite (x_n) converge vers deux points distincts a et b. Comme d est une distance, $\varepsilon := d(a, b)$ est strictement positif. Comme (x_n) converge à la fois vers a et vers b, on a à la fois $d(x_n, a) < \varepsilon/2$ et $d(x_n, b) < \varepsilon/2$ pour n assez grand. D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit $d(a, b) < \varepsilon$, ce qui est absurde. □

Remarque 2 *Dans un espace vectoriel normé, toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*

Exemple 1 Une suite $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ converge pour la distance usuelle si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ convergent.

Exemple 2 Si on munit $\mathbb{K}^d$ de la norme $||\;.\;||_\infty$, alors une suite $(x_n) \subseteq \mathbb{K}^d$ converge dans $\mathbb{K}^d$ si et seulement si elle converge "coordonnée par coordonnée".

Exemple 3 Soit T un ensemble, et soit $\ell^\infty(T, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur T, muni de la norme $||\;.\;||_\infty$. Une suite $(f_n) \subseteq \ell^\infty(T, \mathbb{K})$ converge vers une fonction f au sens de la norme $||\;.\;||_\infty$ si et seulement si (f_n) converge *uniformément* vers f. Pour cette raison, la norme $||\;.\;||_\infty$ est qualifiée de **norme de la convergence uniforme**.

Exemple 4 Soit $\mathcal{C}^1([0; 1])$ l'ensemble des fonctions $f : [0; 1] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit une norme $||\;.\;||_{\mathcal{C}^1}$ sur $C^1([0; 1])$ en posant

$$||f||_{\mathcal{C}^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty\,.$$

Alors, une suite $(f_n) \subseteq \mathcal{C}^1([0; 1])$ converge vers une fonction $f \in \mathcal{C}^1([0; 1])$ au sens de la norme $||\;.\;||_{\mathcal{C}^1}$ si et seulement si (f_n) converge uniformément vers f et (f_n') converge uniformément vers f'.

Exemple 5 Une suite (x_n) converge vers a pour la distance discrète si et seulement si on a $x_n = a$ à partir d'un certain rang.

1.2.2 Applications continues

Définition 1.2.2 *Soient E et F deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est* **continue** *en un point $a \in E$ si "$f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a", autrement dit si la propriété suivante a lieu :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \qquad d(x,a) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon \ .$$

On dit que l'application f est **continue sur** *E si elle est continue en tout point de E.*

A nouveau, cette définition est formellement identique à celle de la continuité pour les fonctions d'une variable réelle.

Exemple 1.2.3 *Sur $E = \mathbb{K}^d$ muni de la norme $||\ .\ ||_\infty$, les applications coordonnées sont continues.*

Preuve. Si $i \in \{1; \dots ; d\}$, alors $|x(i) - y(i)| \leq ||x - y||_\infty$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}^d$. Par conséquent, la i-ème application coordonnée est continue. □

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on montre que la continuité est compatible avec les opérations algébriques : la somme et le produit de deux fonctions numériques continues sont continues, l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continue. De même, la composée de deux applications continues est continue. On en déduit en particulier le résultat suivant :

Corollaire 1.2.4 *Soit $f : A \to \mathbb{K}$, où $A \subset \mathbb{K}^d$. Si $f(x_1, \dots, x_d)$ s'exprime par une formule algébrique en fonction de $x_1, \dots, x_d$, alors f est continue sur $(A, ||\ .\ ||_\infty)$.*

Le résultat suivant, qui est d'usage constant, caractérise la continuité en termes de suites.

Proposition 1.2.5 *Soient E, F deux espaces métriques, et soit $a \in E$. Pour une application $f : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *f est continue en a ;*
(2) *pour toute suite $(x_n) \subseteq E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Preuve. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) découle très facilement des définitions. Inversement, supposons que (1) ne soit pas vérifiée. Cela signifie qu'il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $x(\delta) \in E$ tel que $d(x(\delta), a) < \delta$ et $d(f(x(\delta), f(a)) \geq \varepsilon_0$. En posant $\delta_n = 2^{-n}$ et $x_n = x(\delta_n)$, on obtient une suite (x_n) qui converge vers a et telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$. Ainsi, (2) n'est pas vérifiée. On a donc montré "par contraposée" que (2) entraîne (1). □

1.2.3 Applications lipschitziennes

Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe une constante $k < \infty$ telle que

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k\, d_E(x, y)$$

pour tous $x, y \in E$. Si k est une telle constante, on dit que f est **k-lipschitzienne**. Si on pose

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup \left\{ \frac{d_F(f(x), f(y))}{d_E(x, y)};\ x, y \in E,\ x \neq y \right\}$$

alors la constante $k = \mathrm{Lip(f)}$ vérifie la propriété précédente, et est visiblement la *plus petite* constante vérifiant cette propriété. On dit que $\mathrm{Lip}(f)$ est la **constante de Lipschitz** de l'application f. Par définition de $\mathrm{Lip}(f)$, on a donc l'équivalence suivante :

$$\Big(d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y) \ \text{ pour tous } x, y \in E \Big) \Leftrightarrow \Big(f \text{ est lipschitzienne et } \mathrm{Lip}(f) \leq k \Big).$$

Il est clair que toute application lipschitzienne est continue, mais la réciproque est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, mais elle n'est pas lipschitzienne car $\sqrt{x}/x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. Voici deux exemples importants de fonctions lipschitziennes.

Exemple 1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée, et on a* $\mathrm{Lip(f)} = ||f'||_\infty$.

Preuve. Si f' est bornée, alors f est lipschitzienne et $\mathrm{Lip}(f) \leq ||f'||_\infty$ d'après l'inégalité des accroissements finis. Inversement, si f est lipschitzienne, alors, si $x \in I$, on a

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq \mathrm{Lip}(f)$$

pour tout $y \neq x$, d'où $|f'(x)| \leq \mathrm{Lip}(f)$ en faisant tendre y vers x ; ainsi f' est bornée et $||f'||_\infty \leq \mathrm{Lip}(f)$. □

Exemple 2 *Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout point $a \in E$, l'application $x \mapsto d(x, a)$ est 1-lipschitzienne. Plus généralement, soit A une partie de E. Pour tout $x \in E$, on définit la* **distance de x à** *A par*

$$d(x, A) = \inf \{d(x, z);\ z \in A\}$$

Alors la fonction $d(\,.\,, A)$ est 1-lipschitzienne, et donc continue.

Preuve. Soient $x, y \in E$. Pour tout point $z \in A$, on a $d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. En prenant la borne inférieure en $z \in A$ dans le membre de droite, on en déduit $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, d'où $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Par symétrie, on a en fait $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque. La même preuve montre plus généralement que si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions k-lipschitziennes sur (E, d) et si (f_i) est minorée en tout point, alors la fonction $\inf_i f_i$ est k-lipschitzienne. De même, si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions k-lipschitziennes majorée en tout point, alors la fonction $\sup_i f_i$ est k-lipschitzienne.

1.3 Vocabulaire topologique

1.3.1 Ouverts et fermés d'un espace métrique

Dans toute cette section, (E, d) est un espace métrique.

Définition 1.3.1 *Soit $a \in E$, et soit $r \geq 0$. La* **boule ouverte** *de centre a et de rayon r est l'ensemble*

$$B(a,r) := \{x \in E;\ d(x,a) < r\}\,.$$

La **boule fermée** *correspondante est l'ensemble $B_f(a,r) := \{x;\ d(x,a) \leq r\}$*

Exemples
(1) Dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte $B(a,r)$ est l'intervalle (ouvert !) $]a-r; a+r[$; la boule fermée est l'intervalle $[a-r; a+r]$.
(2) Dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle, les boules sont des disques.
(3) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||\ .\ ||_\infty$, les boules sont des carrés à côtés parallèles aux axes de coordonnées.
(4) Dans un espace métrique discret, les boules de rayon $1/2$ sont les singletons ; les boules de rayon $1/3$ également. Il n'y a qu'une seule boule de rayon 2 : l'espace tout entier.

Définition 1.3.2 *On dit qu'un ensemble $O \subseteq E$ est un* **ouvert** *de (E,d) s'il vérifie la propriété suivante : pour tout point $x \in O$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq O$.*

Exemples
(1) Dans $\mathbb{R}$, un intervalle est un ouvert si et seulement c'est un "intervalle ouvert".
(2) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne ou de la norme $||\ .\ ||_\infty$, le demi-plan $\{(x,y);\ x > 0\}$ est un ouvert.
(3) Dans un espace métrique discret, tous les ensembles sont ouverts. En effet, si $A \subseteq E$ et si $x \in A$, alors $B(x,1/2) = \{x\} \subseteq A$.

La remarque suivante est évidente, mais d'usage constant.

Remarque *Soit O un ouvert de E. Si $x \in O$, alors on peut trouver $r > 0$ tel que la boule* fermée *$B_f(x,r)$ est contenue dans O.*

Preuve. On choisit $r' > 0$ tel que $B(x,r') \subseteq O$, et on prend $r = r'/2$. □

Proposition 1.3.3 *Toute boule ouverte est un ensemble ouvert.*

Preuve. Soit $O = B(a,r)$ une boule ouverte, et soit x un point quelconque de B. On a $d(x,a) < r$ donc on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon + d(x,a) < r$. D'après l'inégalité triangulaire, on a alors $B(x,\varepsilon) \subseteq B(a,r) = O$. Comme x est un point quelconque de O, cela prouve que O est un ouvert de E. □

Proposition 1.3.4 *La famille des ouverts de (E,d) vérifie les propriétés suivantes.*
(1) *$\emptyset$ et E sont des ouverts de E.*
(2) *Une réunion quelconque d'ouverts est encore un ouvert.*
(3) *Une intersection finie d'ouverts est encore un ouvert*

Preuve. La partie (1) est évidente, et la partie (2) découle directement des définitions. Pour démontrer (3), il suffit de montrer que l'intersection de 2 ouverts de E est encore un ouvert : on procède ensuite par récurrence. Soient donc O_1 et O_2 deux ouverts de E. Si $x \in O_1 \cap O_2$, on peut trouver $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subseteq O_1$, et $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subseteq O_2$. Si on pose $r = \min(r_1, r_2)$, alors $r > 0$ et $B(x, r) \subseteq O_1 \cap O_2$. Cela prouve que $O_1 \cap O_2$ est un ouvert de E. □

Corollaire 1.3.5 *Un ensemble $O \subseteq E$ est ouvert pour la distance d si et seulement si O est une réunion de boules ouvertes.*

De façon générale, on appelle **topologie** sur un ensemble E toute famille de parties de E contenant $\emptyset$ et E, stable par réunions quelconques, et stable par intersections finies. Ainsi, la famille de tous les ouverts d'un espace métrique (E, d) est une topologie sur E, qu'on appelle la **topologie définie par** d. Notons une propriété importante vérifiée par cette topologie.

Remarque *Si x, x' sont deux points de E distincts, on peut trouver deux ouverts O et O' tels que $x \in O$, $x' \in O'$ et $O \cap O' = \emptyset$.*

Preuve. Il suffit de prendre $O = B(x, r)$ et $O' = B(x', r)$, où $r > 0$ est choisi de sorte que $2r \leq d(x, x')$. □

Une topologie vérifiant cette propriété est dite **séparée**. Un exemple de topologie non séparée (si E contient au moins 2 points) est la topologie dit *grossière*, où les seuls ouverts sont $\emptyset$ et E.

Définition 1.3.6 *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $C \subseteq E$ est* **fermé** *dans E s'il vérifie la propriété suivante : chaque fois qu'une suite (x_n) d'éléments de C converge dans E, sa limite appartient encore à C.*

Exemple 1 *Dans $\mathbb{R}$, un intervalle est fermé si et seulement si c'est un "intervalle fermé".*

Exemple 2 *Toute boule fermée est un ensemble fermé. En particulier, les singletons sont des ensembles fermés.*

Preuve. Si (x_n) converge vers x et $d(x_n, a) \leq r$ pour tout n, alors, par continuité de l'application $u \mapsto d(u, a)$, on obtient $d(x, a) \leq r$ en passant à la limite. Cela prouve qu'une boule fermée $B_f(a, r)$ est un ensemble fermé. Enfin, un singleton est une boule fermée de rayon $r = 0$. □

Exemple 3 *Soit $[a; b]$ un intervalle fermé borné. Notons $\mathcal{C}([a; b])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [a; b] \to \mathbb{K}$. Alors $\mathcal{C}([a; b])$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty([a; b], \mathbb{K})$.*

Preuve. On sait que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée, donc $\mathcal{C}([a; b])$ est bien un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty([a; b], \mathbb{K})$. Le fait qu'il soit fermé est la traduction du théorème bien connu suivant : *une limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Exemple 4 *Soit $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les suites $x = (x(i)) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant* $\lim_{i \to \infty} x(i) =$

0. *Alors* c_0 *est un sous-espace fermé de* $(\ell^\infty(\mathbb{N}), ||\ .\ ||_\infty)$.

Preuve. Soit (x_n) une suite d'éléments de c_0 convergeant vers un point $x \in \ell^\infty$ pour la norme $||\ .\ ||_\infty$. Il faut montrer que $x \in c_0$, autrement dit qu'on a $\lim_{i\to\infty} x(i) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la norme $||\ .\ ||_\infty$, on peut trouver un entier N tel que $|x_N(i) - x(i)| < \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme de plus $x_N \in c_0$, on peut trouver un indice i_0 tel que $|x_N(i)| < \varepsilon$ pour tout $i \geq i_0$. Pour $i \geq i_0$, on a alors $|x(i)| \leq |x(i) - x_N(i)| + |x_N(i)| < 2\varepsilon$, ce qui prouve que $x \in c_0$. □

Le résultat suivant montre qu'il existe une "dualité" parfaite entre les ouverts et les fermés.

Proposition 1.3.7 *Un ensemble* $C \subseteq E$ *est fermé si et seulement si son complémentaire* $E \setminus C$ *est ouvert.*

Preuve. Supposons que $E \setminus C$ soit ouvert dans E. Soit $(x_n) \subseteq C$ une suite convergeant vers un point $a \in E$, et supposons que a n'appartienne pas à C. Comme $E \setminus C$ est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq E \setminus C$; mais comme (x_n) converge vers a, on peut trouver un entier n tel que $x_n \in B(a, r)$, ce qui contredit $x_n \in C$. On a donc montré par l'absurde que si $E \setminus C$ est ouvert, alors C est fermé.
Inversement, supposons que $E \setminus C$ ne soit pas ouvert dans E. On peut alors trouver un point $a \in E \setminus C$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $r > 0$, il existe un point $x(r) \in B(a, r)$ qui n'appartient pas à $E \setminus C$, autrement dit un point $x(r) \in B(a, r) \cap C$. En prenant $r_n = 2^{-n}$, on obtient une suite $(x_n) \subseteq C$ qui converge vers a. Comme a n'appartient pas à C, cela montre que C n'est pas fermé. On a donc montré que si C est fermé, alors $E \setminus C$ est ouvert. □

Corollaire 1.3.8 *Une intersection quelconque de fermés est encore un fermé ; une réunion finie de fermés est encore un fermé.*

Le résultat suivant est très utile pour montrer que des ensembles sont ouverts ou fermés.

Proposition 1.3.9 *Soient* E *et* F *deux espaces métriques. Pour une application* $f : E \to F$, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) f *est continue.*
(2) *Pour tout ouvert* $O \subseteq F$, $f^{-1}(O)$ *est un ouvert de* E *;*
(3) *Pour tout fermé* $C \subseteq F$, $f^{-1}(C)$ *est un fermé de* E.

Preuve. Supposons f continue. Soit O un ouvert de F, et soit $a \in f^{-1}(O)$. Comme O est ouvert, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subseteq O$. Comme f est continue, on peut ensuite trouver $\delta > 0$ tel que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ dès que $d(x, a) < \delta$. On a alors $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon) \subseteq O$, autrement dit $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(O)$, ce qui montre que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E. On a donc montré que (1) entraîne (2). Inversement, supposons (2) vérifiée, et fixons un point $a \in E$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, la boule ouverte $B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F d'après 1.3.3, donc $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de E, qui contient a. On peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$: cela signifie qu'on a $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ dès que $d(x, a) < \delta$, et on en déduit que l'application f est continue en tout point $a \in E$. Ainsi, les propriétés (1) et (2) sont équivalentes. Enfin, (2) et (3) sont équivalentes par passage au complémentaire. □

Exemples

(1) L'ensemble $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 > x\}$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, ||\ .\ ||_\infty)$. En effet, on a $V = f^{-1}(]0;+\infty[)$, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'application continue définie par $f(x,y) = y^2 - x$. Comme $]0;+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble V est bien ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
(2) La parabole $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 = x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. En effet, avec les notations précédentes, on a $\mathcal{P} = f^{-1}(\{0\})$.
(3) Si $T : E \to F$ est une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés, alors le noyau de T est un sous-espace vectoriel fermé de E. En effet, on a $\mathrm{Ker}(T) = T^{-1}(\{0\})$, et $\{0\}$ est fermé dans F.

1.3.2 Adhérence, intérieur

Dans cette section, (E,d) est un espace métrique.

Définition 1.3.10 *On dit qu'un point $x \in E$ est* **adhérent** *à un ensemble $A \subseteq E$ si toute boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ rencontre A, autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point $a \in A$ tel que $d(x,a) < \varepsilon$. L'ensemble de tous les points de E adhérents à une partie A de E est appelé l'***adhérence** *de A dans E, et se note $\overline{A}$. Par définition, on a donc $A \subseteq \overline{A}$.*

Exemples
(1) Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence d'un intervalle est l'intervalle fermé correspondant.
(2) Dans $(\mathbb{R}^2, ||\ .\ ||_\infty)$, l'adhérence du demi-plan $\{(x,y);\ x > 0\}$ est le demi-plan $\{(x,y);\ x \geq 0\}$.
(3) Si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors la borne supérieure de A n'appartient pas nécessairement à A, mais elle appartient toujours à $\overline{A}$.

Le résultat suivant est simple mais important.

Proposition 1.3.11 *Soit A une partie d'un espace métrique E. Pour un point $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *x est adhérent à A ;*
(2) *$d(x,A) = 0$;*
(3) *x est la limite d'une suite de points de A.*

Preuve. Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes par définition de l'adhérence. L'implication "(3) $\Rightarrow$ (1)" découle directement des définitions. Inversement, si x est adhérent à A, alors, pour $\varepsilon_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un point $x_n \in A$ tel que $d(x_n, x) < 2^{-n}$: cela prouve (3). □

Corollaire 1.3.12 *Un ensemble $C \subseteq E$ est fermé si et seulement si $\overline{C} = C$.*

Preuve. D'après (3), un ensemble C est fermé si et seulement si $\overline{C} \subseteq C$, d'où le résultat puisqu'on a toujours $C \subseteq \overline{C}$. □

Proposition 1.3.13 *Si A est une partie de E, alors $\overline{A}$ est un fermé de E. Plus précisément, $\overline{A}$ est le* plus petit *fermé de E contenant A.*

Preuve. On a bien sûr $A \subseteq \overline{A}$. Pour montrer que $\overline{A}$ est fermé, fixons une suite $(x_n) \subseteq \overline{A}$ convergeant vers un point $x \in E$. Comme $x_n \in \overline{A}$, on peut, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, trouver un point $\tilde{x}_n \in A$ tel que $d(\tilde{x}_n, x_n) < 2^{-n}$. Alors la suite $(\tilde{x}_n)$ converge vers x car $d(\tilde{x}_n, x) < 2^{-n} + d(x_n, x)$, ce qui prouve que $x \in \overline{A}$. Ainsi, $\overline{A}$ est un fermé de E. Enfin, si C est un fermé de E tel que $A \subseteq C$, alors $\overline{A} \subseteq \overline{C} = C$, ce qui prouve la minimalité de $\overline{A}$.

Corollaire 1.3.14 *Si A, B sont des parties de E, alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Preuve. On a $A \subseteq A \cup B$, donc $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$; de même pour $\overline{B}$, d'où $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. De plus, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé en tant que réunion de 2 fermés, et $\overline{A} \cup \overline{B}$ contient $A \cup B$, donc $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$ par minimalité de $\overline{A \cup B}$. □

Définition 1.3.15 *On dit qu'un point $a \in E$ est* **intérieur** *à une partie $A \subseteq E$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$; on dit encore que A est un* **voisinage** *de a dans E. L'ensemble de tous les points intérieurs à un ensemble A s'appelle l'***intérieur** *de A dans E et se note $\mathring{A}$. Par définition, on a donc $\mathring{A} \subseteq A$.*

Par définition de l'intérieur, un ensemble $O \subseteq E$ est ouvert si et seulement si $O \subseteq \mathring{O}$. Comme on a toujours $\mathring{A} \subseteq A$, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.3.16 *Un ensemble $O \subseteq E$ est ouvert si et seulement si $\mathring{O} = O$, autrement dit, si et seulement si O est un voisinage de chacun de ses points.*

Toujours par définition de l'intérieur, on constate qu'un point $a \in E$ n'est *pas* intérieur à un ensemble A si et seulement si a est adhérent à $E \setminus A$. Autrement dit, on a

$$\mathring{A} = E \setminus (\overline{E \setminus A}) .$$

On en déduit aussitôt le résultat suivant, qui peut bien sûr aussi se démontrer directement.

Proposition 1.3.17 *Si A est une partie de E, alors $\mathring{A}$ est un ouvert de E. C'est le* plus grand *ouvert de E contenu dans A.*

Les deux résultats suivants sont souvent utiles. Le premier est faux dans un espace métrique général, par exemple dans un espace discret.

Proposition 1.3.18 *Dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte non vide est la boule fermée correspondante, et l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte correspondante.*

Preuve. Soit $B = B(a, r)$ une boule ouverte non vide ($r > 0$) dans un espace vectoriel normé E, et soit B_f la boule fermée correspondante. Comme B_f est fermée et contient B, on a $\overline{B} \subseteq B_f$. Inversement, soit $x \in B_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $x_n = (1 - 2^{-n})x + 2^{-n}a$ appartient à B car $||x_n - a|| = (1 - 2^{-n})||x - a|| < r$. Comme la suite (x_n) converge vers x, on a donc $x \in \overline{B}$.
Montrons maintenant que l'intérieur de la boule fermée B_f est la boule ouverte B. On a $B \subseteq \mathring{B}_f$ car B est un ouvert contenu dans B_f. Inversement, soit $x \in \mathring{B}_f$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq B_f$. Pour $\alpha > 0$ assez petit, le point $y = x + \alpha(x - a)$ appartient à $B(x, \varepsilon)$, et donc $||y - a|| \leq r$, ou encore $(1 + \alpha)||x - a|| \leq r$. On a donc $||x - a|| < r$, autrement dit $x \in B$. □

Proposition 1.3.19 *Soit E et F deux espaces métriques. Pour une application $f : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *f est continue ;*
(2) *pour tout ensemble $A \subseteq E$, on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

Preuve La preuve de "(1) entraîne (2)" est très simple en utilisant des suites : si $x \in \overline{A}$ et si $(x_n) \subseteq A$ converge vers x, alors $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ par continuité de f et donc $f(x) \in \overline{f(A)}$. On peut aussi démontrer cette implication en utilisant uniquement la caractérisation de la continuité en termes d'images réciproques ; c'est un exercice instructif. Inversement, supposons (2) vérifiée. Soit C un fermé quelconque de F, et posons $A = f^{-1}(C)$. Par (2), on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{C} = C$, et donc $\overline{A} \subseteq f^{-1}(C) = A$. Ainsi, $A = f^{-1}(C)$ est fermé dans E, pour tout fermé $C \subseteq F$, ce qui prouve que f est continue. □

1.3.3 Frontière ; connexité

Définition 1.3.20 *Si A est une partie de E, la* **frontière** *de A dans E est l'ensemble $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2, \| \,.\, \|_\infty)$, la frontière du quart de plan $\{(x,y);\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ est la réunion des deux demi-droites $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$, ce qui correspond bien à la signification intuitive du mot "frontière".

Remarques
(1) La frontière d'un ensemble $A \subseteq E$ est vide si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé dans E. En particulier, dans un espace métrique discret, la frontière de n'importe quelle partie est vide.
(2) Si $A \subseteq E$ est ouvert ou fermé, alors la frontière de A dans E est d'intérieur vide.

Le résultat suivant est intuitivement évident, mais en aucun cas trivial.

Théorème 1.3.21 (lemme du passage des douanes)
Soit E un espace métrique, et soit A une partie de E. Si $\gamma : [0;1] \to E$ est une application continue telle que $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \in E \setminus A$, alors l'image de γ rencontre la frontière de A.

Preuve. Posons $a = \sup\{t \in [0;1];\ \gamma(t) \in A\}$. Le réel a est bien défini car $\gamma(0) \in A$. Par définition de t_0, on peut trouver une suite (t_n) tendant vers a telle que $\gamma(t_n) \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; et par continuité de γ, on en déduit $\gamma(a) \in \overline{A}$. Si on avait $\gamma(a) \in \mathring{A}$ (et donc en particulier $a \neq 1$), alors, toujours par continuité de γ, on pourrait trouver $\delta > 0$ tel que $\gamma(t) \in A$ pour tout $t \in [0;1]$ vérifiant $a < t \leq a + \delta$, ce qui contredirait la définition de a. Ainsi, $\gamma(a)$ appartient à la frontière de A. □

Corollaire 1.3.22 (théorème des valeurs intermédiaires)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $a, b \in I$, $a < b$, alors f prend au moins une fois sur $[a;b]$ toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. En particulier, $f(I)$ est un intervalle.

Preuve. Il suffit de montrer que si $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(0) < 0 < f(1)$, alors f s'annule au moins une fois sur $[0;1]$. Cela découle du théorème précédent appliqué à $E = \mathbb{R}$, $\gamma = f$ et $A =]-\infty; 0[$. □

Corollaire 1.3.23 *Si E est un espace vectoriel normé, alors la frontière de tout ensemble $A \subset E$ différent de $\emptyset$ et E est non vide. Autrement dit, les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E.*

Preuve. Soit A une partie de E non vide et différente de E. On peut trouver un point $a \in A$ et un point $b \in E \backslash A$, et relier a à b par l'application continue $\gamma : [0;1] \to E$ définie par $\gamma(t) = (1-t)a+tb$. D'après le lemme précédent, l'image de γ doit rencontrer la frontière de A, donc $\partial A \neq \emptyset$. □

Un espace métrique E est dit **connexe** si les seules parties de à la fois ouvertes et fermées dans E sont $\emptyset$ et E ; ou encore, si on ne peut pas partitionner E en deux ouverts non vides. Pour démontrer 1.3.23, la seule propriété de l'evn E qu'on a utilisée est le fait que deux points quelconques de E peuvent toujours être reliés par un "chemin" continu $\gamma : [0;1] \to E$. Un espace métrique vérifiant cette propriété est dit **connexe par arcs**. On vient donc en fait de montrer que tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

Une partie A d'un espace métrique E est dite connexe si A est connexe pour la topologie induite (voir 1.5.1). Les deux résultats suivants sont importants.

Proposition 1.3.24 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve. Un intervalle est visiblement connexe par arcs, donc connexe. Inversement, si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, alors on peut trouver trois nombres $u < w < v$ tels que $u, v \in A$ mais $w \notin A$, et on obtient une partition de A en deux ouverts non vides, à savoir $A \cap \{x;\ x < u\}$ et $A \cap \{x;\ x > v\}$.
□

Proposition 1.3.25 *Dans un espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs.*

Preuve. Soit Ω un ouvert connexe d'un evn E, et soit $a \in \Omega$. L'idée de la preuve est de montrer que l'ensemble des points $x \in \Omega$ que l'on peut joindre à a par un chemin continu dans Ω est à la fois ouvert et fermé dans Ω, ce qui permet de conclure par connexité. Les détails constituent un très bon exercice. □

1.4 Distances équivalentes

Définition 1.4.1 *Soit E un ensemble. On dit que deux distances d_1 et d_2 sur E sont* **équivalentes** *si elles définissent la même topologie. Si E est un espace vectoriel, on dit que deux normes sur E sont équivalentes si les distances associées le sont.*

Notons qu'on peut reformuler la définition comme suit : *les distances d_1 et d_2 sont équivalentes si et seulement les deux applications $id : (E, d_1) \to (E, d_2)$ et $id : (E, d_2) \to (E, d_1)$ sont continues.* D'après la caractérisation de la continuité par les suites, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.4.2 *Deux distances sont équivalentes si et seulement si elles possèdent les mêmes suites convergentes.*

Dans le cas des normes, on dispose d'un critère très simple pour "tester" l'équivalence ou la non-équivalence.

Proposition 1.4.3 *Deux normes $||\ .\ ||$ et $|||\ .\ |||$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : il existe deux constantes $c > 0$ et $C < \infty$ telles que*

$$\forall x \in E \qquad c\,|||x||| \leq ||x|| \leq C\,|||x|||\,.$$

Preuve. Il est clair que si cette propriété a lieu, alors les deux normes possèdent les mêmes suites convergentes, et sont donc équivalentes. Inversement, si cette propriété n'a pas lieu, on peut supposer par exemple qu'il n'existe pas de constante $C < \infty$ telle que $|| \,.\, || \leq C \, ||| \,.\, |||$. On peut alors trouver une suite $(x_n) \subseteq E$ telle que $||x_n|| > 2^n \, |||x_n|||$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $y_n = \frac{x_n}{||x_n||}$ (ce qui est possible car $x_n \neq 0$), alors $||y_n|| = 1$ et $|||y_n||| < 2^{-n}$. Ainsi, la suite (y_n) converge vers 0 pour la norme $||| \,.\, |||$, mais pas pour la norme $|| \,.\, ||$. □

Exemple 1 *Sur $\mathbb{K}^d$, les normes $|| \,.\, ||_2$ et $|| \,.\, ||_\infty$ sont équivalentes. Plus précisément, on a $|| \,.\, ||_\infty \leq || \,.\, ||_2 \leq \sqrt{d} \, || \,.\, ||_\infty$.*

La preuve est laissée en exercice.

Exemple 2 *Sur $E = \mathcal{C}([0;1])$, les normes $|| \,.\, ||_\infty$ et $|| \,.\, ||_1$ ne sont* pas *équivalentes.*

Preuve. Si $f \in \mathcal{C}([0;1])$, alors $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt \leq ||f||_\infty$, mais il n'y a pas d'inégalité en sens inverse. Par exemple, la suite (f_n) définie par $f_n(t) = t^n$ tend vers 0 pour $|| \,.\, ||_1$ (on a $||f_n||_1 = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$), mais on a $||f_n||_\infty = 1$ pour tout n. □

1.4.1 Équivalence des normes en dimension finie

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.4.4 *Sur un espace vectoriel de dimension finie,* toutes *les normes sont équivalentes.*

Preuve. Comme tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on peut supposer que le corps de base est $\mathbb{R}$. Soit donc E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et fixons en une base $(e_1, \dots, e_d)$. On identifie E à $\mathbb{R}^d$ via cette base, ce qui permet de considérer la norme $|| \,.\, ||_\infty$ sur E. On va montrer que toute norme sur E est équivalente à $|| \,.\, ||_\infty$. Dans la suite, on fixe une norme $|| \,.\, ||$ sur E.

Si $x = \sum_1^d x(i) e_i \in E$, alors

$$||x|| \leq \sum_{i=1}^{d} ||x(i) e_i|| = \sum_{i=1}^{d} |x(i)| \, ||e_i|| \, .$$

On en déduit

$$||x|| \leq C \, ||x||_\infty \, ,$$

où $C = \sum_1^d ||e_i||$. Il reste donc à trouver une deuxième constante c telle que $|| \,.\, || \geq c \, || \,.\, ||_\infty$. On aura besoin pour cela de deux lemmes.

Lemme 1.4.5 *L'application $|| \,.\, ||$ est continue sur $(E, || \,.\, ||_\infty)$.*

Preuve. Pour $x, y \in E$, on a $| \, ||x|| - ||y|| \, | \leq ||x - y|| \leq C ||x - y||_\infty$, d'où le résultat. □

Lemme 1.4.6 *Toute suite bornée dans $(E, || \,.\, ||_\infty)$ possède une sous-suite convergente.*

Preuve. Soit (x_n) une suite bornée dans $(E, || \,.\, ||_\infty)$, et écrivons $x_n = \sum_1^d x_n(i) e_i$. Par définition de la norme $|| \,.\, ||_\infty$, chaque suite $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. D'après le **théorème de Bolzano-Weierstrass**, la suite (x_n) possède une sous-suite (x'_n) telle que $(x'_n(1))$ converge. De même, (x'_n) possède une sous-suite (x''_n) telle que $(x''_n(2))$ converge ; alors $(x''_n(1))$ converge également, en tant que sous-suite de $(x'_n(1))$, donc $(x''_n(i))$ converge pour $i = 1, 2$. En répétant d fois ce raisonnement, on voit qu'on aboutit à une sous-suite $(\tilde{x}_n)$ de (x_n) telle que $(\tilde{x}_n(i))$ converge pour $i = 1, \dots, d$. Ainsi $(\tilde{x}_n)$ converge "coordonnée par coordonnée", autrement dit converge dans $(E, || \,.\, ||_\infty)$. □

On peut maintenant achever la preuve du Théorème 1.4.4.
Posons $S_\infty = \{x \in E;\ ||x||_\infty = 1\}$, et $c = \inf\{||x||;\ x \in S_\infty\}$. Par définition, on a $\left\| \frac{x}{||x||_\infty} \right\| \geq c$ pour tout $x \neq 0$, d'où $||x|| \geq c\, ||x||_\infty$, inégalité évidemment encore valable pour $x = 0$. Il reste donc à montrer que la constante c est *strictement* positive.
Par définition de c, on peut trouver une suite $(x_n) \subseteq S_\infty$ telle que $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = c$. D'après le Lemme 1.4.6, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite (x_n) converge pour la norme $|| \,.\, ||_\infty$ vers un certain $x \in E$. Comme les deux normes $|| \,.\, ||$ et $|| \,.\, ||_\infty$ sont continues sur $(E, || \,.\, ||_\infty)$ (d'après le lemme 1.4.5), on en déduit d'une part $||x||_\infty = \lim ||x_n||_\infty = 1$, donc $x \neq 0$, et d'autre part $||x|| = \lim ||x_n|| = c$, donc $c \neq 0$ puisque $x \neq 0$ et que $|| \,.\, ||$ est une norme. □

Corollaire 1.4.7 *Un espace vectoriel E de dimension finie possède une unique topologie d'espace vectoriel normé, qu'on appelle la* **topologie usuelle** *de E. Si $E = \mathbb{K}^d$, cette topologie est celle de la convergence "coordonnée par coordonnée".*

Par exemple, on peut parler de la convergence d'une suite de matrices sans qu'il soit nécessaire de définir explicitement une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$: une suite de matrices converge si et seulement si elle converge "coefficients par coefficients".

Corollaire 1.4.8 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E. Soit également $f : E \to \mathbb{K}$. Si $f(x)$ s'exprime par une formule algébrique en fonction des coordonnées de x dans la base $\mathbf{e}$, alors la fonction f est continue.*

Preuve. Par équivalence des normes, on peut se ramener au cas où $E = (\mathbb{K}^d, || \,.\, ||_\infty)$, pour lequel le résultat a déjà été démontré. □

Par exemple, l'application "déterminant" est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ car le déterminant d'une matrice M est fonction polynomiale des coefficients de M.

Corollaire 1.4.9 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Preuve. On peut se ramener à $(\mathbb{R}^d, || \,.\, ||_\infty)$, où le résultat a déjà été démontré. □

1.5 Sous-espaces, produits

1.5.1 Sous-espaces d'un espace métrique

Si (E, d) est un espace métrique et si A est une partie de E, alors (A, d) est également un espace métrique. On dit que (A, d) est un **sous-espace métrique** de l'espace métrique (E, d). La topologie de (A, d) s'appelle la topologie **induite** sur A par la distance d.

Il est important de remarquer qu'un ouvert de A n'est pas nécessairement un ouvert de E. Par exemple, A lui-même est un ouvert de A, mais n'a aucune raison d'être ouvert dans E. Le résultat suivant caractérise complètement les ouverts pour la topologie induite.

Proposition 1.5.1 *Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Un ensemble $\Omega \subseteq A$ est un ouvert de A pour la topologie induite si et seulement si Ω est de la forme $\Omega = O \cap A$, où O est un ouvert de E.*

Preuve. L'injection canonique $i : (A, d) \to (E, d)$ est continue (car c'est une isométrie), donc $O \cap A = i^{-1}(O)$ est ouvert dans A pour tout ouvert $A \subseteq E$. Inversement, une boule ouverte de (A, d) est par définition un ensemble du type $B(a, r) \cap A$, où $a \in A$, donc tout ouvert de (A, d), qui est réunion de boules ouvertes de (A, d), est de la forme $O \cap A$, où O est une réunion de boules ouvertes de E, c'est à dire un ouvert de E. $\square$

Corollaire 1.5.2 *Un ensemble $\Gamma \subseteq A$ est un fermé de A si et seulement si $\Gamma = C \cap A$, où C est un fermé de E.*

Par exemple, l'intervalle $]0; 1]$ est un ouvert de $[-1; 1]$ car $]0; 1] =]0; +\infty[\cap [-1; 1]$. L'intervalle $]-1; 0]$ est à la fois ouvert et fermé dans $]-1; 0] \cup [1; 2]$.

La preuve du résultat suivant est immédiate en utilisant des suites.

Proposition 1.5.3 *Soit A un sous-espace d'un espace métrique (E, d). Si B est une partie de A, alors l'adhérence de B dans A est égale à $\overline{B} \cap A$, où $\overline{B}$ est l'adhérence de B dans E.*

1.5.2 Produits finis d'espaces métriques

On a vu que dans l'espace métrique $(\mathbb{K}^d, || \cdot ||_\infty)$, la convergence d'une suite est la convergence "coordonnée par coordonnée". De façon générale, on a le résultat suivant.

Proposition 1.5.4 *Soient $E_1, \ldots, E_k$ des espaces métriques, et soit $E = E_1 \times \ldots \times E_k$. Il existe une distance d sur E vérifiant la propriété suivante : une suite converge dans (E, d) si et seulement si elle converge coordonnée par coordonnée. Si les E_i sont des espaces vectoriels normés, il existe une norme sur E vérifiant cette propriété.*

Preuve. Pour $i \in \{1; \ldots; k\}$, choisissons une distance d_i sur E_i compatible avec la topologie de E_i. Alors la formule

$$d(x, y) = \max\left(d_1(x(1), y(1)), \ldots, d_k(x(k), y(k))\right)$$

définit une distance sur E, et on vérifie sans difficulté que la distance d convient. Enfin, si les d_i proviennent de normes $||\ .\ ||_i$, alors d provient de la norme définie par $||\ x\ || = \max(||x(1)||_1, \dots, ||x(k)||_k)$.
$\square$

Une distance sur E induisant la convergence coordonnée par coordonnée s'appelle une **distance produit**. Toutes les distances produit définissent la même topologie sur E ; cette topologie s'appelle la **topologie produit** sur E. Dans le cas $E = \mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, la topologie produit est la topologie usuelle.

Corollaire 1.5.5 *Soit $E = E_1 \times \ldots \times E_k$ un espace métrique produit.*
(1) *Les applications coordonnés $\pi_i : E \to E_i$ sont continues.*
(2) *Si F est un espace métrique, alors une application $f : F \to E$ est continue si et seulement si toutes les applications $\pi_i \circ f$ le sont. Autrement dit, en écrivant $f = (f_1, \dots, f_k)$, l'application f est continue si et seulement chacune de ses "composantes" $f_1, \dots, f_k$ est continue.*

La preuve est immédiate en utilisant des suites. $\square$

Le corollaire suivant décrit la topologie d'un espace produit. Appelons **pavé ouvert** d'un espace métrique produit $E = E_1 \times \ldots \times E_k$ toute partie de E de la forme $V = V_1 \times \ldots \times V_k$, où pour chaque i, V_i est un ouvert de E_i.

Corollaire 1.5.6 *Soit $E = E_1 \times \ldots \times E_k$ un espace métrique produit. Un ensemble $O \subseteq E$ est ouvert si et seulement si O est une reunion de pavés ouverts ; autrement dit, si pour tout point $x = (x_1, \dots, x_k) \in O$, on peut trouver des ouverts $V_i \subseteq E_i$ tels que $x_i \in V_i$ pour tout $i \in \{1; \dots; k\}$ et $V_1 \times \ldots \times V_k \subseteq O$.*

Preuve. Les boules ouvertes pour la distance d définie dans la preuve de la proposition précédente sont des produits de boules ouvertes, donc des pavés ouverts particuliers ; par conséquent, tout ouvert de E est réunion de pavés ouverts. Inversement, un pavé ouvert $V = V_1 \times \ldots \times V_k$ peut s'écrire $V = \pi_1^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap \pi_k^{-1}(V_k)$, donc tout pavé ouvert est un ouvert de E, et par conséquent toute réunion de pavés ouverts est un ouvert. $\square$

Proposition 1.5.7 *Si F est un espace métrique, alors la* **diagonale** $\Delta_F = \{(x, y) \in F \times F ;\ x = y\}$ *est un fermé de $F \times F$.*

Preuve. Si une suite (x_n, x_n) converge vers un point $(x, y) \in F \times F$, alors $x = y$ par unicité de la limite. $\square$

Corollaire 1.5.8 *Soient E et F deux espaces métriques. Si $f : E \to F$ est une application continue, alors le graphe de f est fermé dans $E \times F$.*

Preuve. Soit $\Phi : E \times F \to F \times F$ définie par $\Phi(x, y) = (f(x), y)$. Par définition de la topologie produit sur $F \times F$, l'application Φ est continue. De plus, le graphe de f est exactement $\Phi^{-1}(\Delta_F)$, où Δ_F est la diagonale de F. Par conséquent, le graphe de f est fermé. $\square$

Proposition 1.5.9 *Si E est un espace vectoriel normé, alors les applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues respectivement sur $E \times E$ et sur $\mathbb{K} \times E$.*

Preuve. Soit (x_n, y_n) une suite dans $E \times E$ convergeant vers $(x, y) \in E \times E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leq ||x - x_n|| + ||y - y_n|| ,$$

Donc la suite $(x_n + y_n)$ converge vers $x + y$. Cela prouve que l'application $(x, y) \mapsto x + y$ est continue sur $E \times E$.
Soit (λ_n, x_n) une suite convergeant vers (λ, x) dans $\mathbb{K} \times E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| = ||\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x|| \leq |\lambda_n| \, ||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda| \, ||x|| .$$

Comme la suite (λ_n) est bornée, on en déduit que $\lambda_n x_n$ tend vers λx. Cela prouve la continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$. □

1.6 Parties denses d'un espace métrique

Soit E un espace métrique. Une partie A de E est dite **dense** dans E si on a $\overline{A} = E$. Cela se reformule comme suit.

Proposition 1.6.1 *Pour un ensemble $A \subseteq E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *A est dense dans E ;*
(2) *$E \setminus A$ est d'intérieur vide dans E ;*
(3) *tout ouvert non vide de E rencontre A ;*
(4) *pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $a \in A$ tel que $d(a, x) < \varepsilon$;*
(5) *tout point de E est limite d'une suite de points de A.*

La preuve est immédiate. Pour l'équivalence de (1) et (2), il faut simplement se rappeler que l'intérieur de $E \setminus A$ est le complémentaire de l'adhérence de A. □

Exemple 1 *L'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 2 *L'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.*

Preuve. Soit $\Phi : \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'application déterminant. Comme le déterminant d'une matrice est fonction polynomiale de ses coefficients, l'application Φ est continue. Par conséquent, $GL_d(\mathbb{K}) = \Phi^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Montrons que cet ouvert est dense.
Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, et pour $t \in [0; 1]$, soit $M(t)$ la matrice $tM + (1 - t)Id$. La fonction P définie par $P(t) = \det(M(t))$ est polynomiale, et $P(0) = 1 \neq 0$. Par conséquent, P n'a qu'un nombre fini de racines. On peut donc trouver une suite (t_n) tendant vers 1 telle que $P(t_n) \neq 0$ pour tout n. Alors $M(t_n)$ est inversible pour tout n, et $M(t_n)$ tend vers $M(1) = M$. Comme M est une matrice quelconque, on a bien montré que $GL_d(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. □

Exemple 3 *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour tout $p \in [1; \infty[$.*

Preuve. Par "compact", on entend ici "fermé borné". La démonstration utilise les deux faits suivants.

Fait 1 (régularité de la mesure de Lebesgue)
Pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$ de mesure finie, on peut trouver un compact K et un ouvert O tels que $K \subseteq A \subseteq O$ et $m(O \setminus K)$ est arbitrairement petite.

Fait 2 *Soit (E, d) un espace métrique. Si C_0 et C_1 sont deux fermés de E tels que $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, alors on peut trouver une fonction continue $f : E \to [0; 1]$ valant 0 sur C_0 et 1 sur C_1. Par exemple, on peut prendre*

$$f(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}.$$

On sait que les fonctions étagées sont denses dans L^p. Pour obtenir la densité des fonctions continues à support compact, il suffit donc de montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est étagée et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors on peut trouver une fonction φ continue à support compact telle que $||f - \varphi||_p < \varepsilon$. Fixons f. Écrivons $f = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$, où la somme est finie et les A_i sont des boréliens deux à deux disjoints. Comme $f \in L^p$ et $p < \infty$, les ensembles A_i sont de mesure finie. Par régularité de la mesure de Lebesgue, on peut trouver des compacts K_i et des ouverts O_i tels que $K_i \subseteq A_i \subseteq O_i$ et $m(O_i \setminus K_i)$ est arbitrairement petite. On peut ensuite choisir des fonctions continues $f_i : \mathbb{R}^d \to [0; 1]$ telles que $f_i = 1$ sur K_i et f_i est à support compact contenu dans O_i : on applique le fait 2 avec $C_1 = O_i$ et $C_2 = \mathbb{R}^d \setminus W_i$, où W_i est un ouvert contenant K_i tel que $\overline{W}_i$ est compact et contenu dans O_i ; à ce stade du cours, l'existence d'un tel ouvert n'a en fait rien d'évident (voir 3.3.2, exemple 2). Alors la fonction $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ est continue à support compact, et $||\varphi - f||_p$ est arbitrairement petite. □

Exemple 4 *Si $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné, alors l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $\mathcal{C}([a; b])$ pour la norme $||\ .\ ||_\infty$. C'est le* **théorème de Weierstrass**.

1.7 Séparabilité

On rappelle qu'un ensemble T est dit **dénombrable** s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur T. Il revient au même de dire qu'il existe une injection de T dans $\mathbb{N}$, ou encore que T est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Définition 1.7.1 *Un espace métrique E est dit* **séparable** *s'il existe un ensemble $D \subseteq E$ dénombrable et dense dans E.*

Exemple 1 *$\mathbb{R}$ est séparable, car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 2 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.*

Preuve. On se ramène au cas de $(\mathbb{R}^d, ||\ .\ ||_\infty)$, et il suffit alors d'observer que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$. □

Exemple 3 *Pour $p \in [1; \infty[$, l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable. De même, l'espace $c_0(\mathbb{N})$ est séparable.*

Preuve. Notons $c_{00}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ à support fini. Il découle directement des définitions que si $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ ou $x \in c_0(\mathbb{N})$, alors la suite (x_n) définie par $x_n = (x(0), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots)$

converge vers x pour la norme considérée. Par conséquent, c_{00} est dense dans ℓ^p et dans c_0. Comme de plus toute suite à support fini peut s'approcher par une suite à coordonnées rationnelles et comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Q}^n$ est dénombrable, on en déduit sans peine le resultat. $\square$

Exemple 4 *Si $[a;b]$ est un intervalle fermé borné, alors l'espace $\mathcal{C}([a;b])$ est séparable.*

Preuve. D'après le théorème de Weierstrass et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, les fonctions polynomiales à coefficients rationnels sont denses dans $\mathcal{C}([a;b])$. $\square$

On dit qu'une famille d'ouverts $\mathcal{B}$ d'un espace métrique E est une **base** pour la topologie de E si tout ouvert de E est réunion d'ouverts appartenant à la famille $\mathcal{B}$. Il revient au même de dire que pour tout ouvert $O \in E$ et pour tout point $x \in O$, on peut trouver un ouvert B appartenant à la famille $\mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq O$.

Proposition 1.7.2 *Pour un espace métrique (E,d), les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *E est séparable ;*
(2) *la topologie de E possède une base dénombrable d'ouverts.*

Preuve. Supposons E séparable, et fixons un ensemble $D \subseteq E$ dénombrable et dense dans E. Notons $\mathcal{B}$ la famille de toutes les boules ouvertes de la forme $B(z,r)$, où $z \in D$ et $r \in \mathbb{Q}$. La famille $\mathcal{B}$ est dénombrable. Si O est un ouvert de E et si $x \in O$, on peut trouver un nombre rationnel $r > 0$ tel que $B(x,2r) \subseteq O$, puis un point $z \in D$ dans la boule ouverte $B(x,r)$. Alors $x \in B(z,r)$ et $B(z,r) \subseteq B(x,2r) \subseteq O$. Cela montre que $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de E.
Supposons maintenant que la topologie de E possède une base dénombrabe $\mathcal{B}$. Pour tout ouvert non vide $B \in \mathcal{B}$, choisissons un point $x_B \in B$, et posons $D = \{x_B;\ B \in \mathcal{B}\}$. Alors D est dénombrable, et il est visiblement dense dans E : tout ouvert $O \neq \emptyset$ contient un ouvert $B \in \mathcal{B}$, donc un point $x_B \in D$. $\square$

Corollaire 1.7.3 (propriété de Lindelöf)
Soit E un espace métrique séparable. Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E, alors il existe un ensemble dénombrable $J \subseteq I$ tel que $\bigcup_{i\in J} O_i = \bigcup_{i\in I} O_i$.

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable pour la topologie de E. Notons $\tilde{\mathcal{B}}$ la famille de tous les ouverts $B \in \mathcal{B}$ contenus dans un certain O_i, et pour $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, choisissons un indice i_B tel que $B \subseteq O_{i_B}$. Enfin, posons, $J = \{i_B;\ b \in \tilde{\mathcal{B}}\}$. L'ensemble J est dénombrable, et on a tout fait pour avoir $\bigcup_{i\in J} O_i = \bigcup_{i\in I} O_i$. $\square$
Remarque. En fait, pour un espace métrique la propriété de Lindelöf est *équivalente* à la séparabilité. C'est un bon exercice.

Corollaire 1.7.4 *Soit (E,d) un espace métrique séparable. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, l'espace E est réunion dénombrable de boules ouvertes de rayon ε.*

Preuve. Pour $x \in E$, posons $O_x = B(x,\varepsilon)$. Alors $E = \bigcup\limits_{x\in E} O_x$, donc il suffit d'appliquer le corollaire précédent. $\square$

Corollaire 1.7.5 *Tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable.*

Preuve. Soit E un espace métrique séparable, et soit $A \subseteq E$. Si $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$ est une base dénombrable pour la topologie de E, alors la famille $\mathcal{B}_A = (B_i \cap A)_{i \in I}$ est une base dénombrable pour la topologie de A. □

Proposition 1.7.6 *Tout produit fini d'espaces métriques séparables est séparable.*

Preuve. Si $E_1, \ldots, E_k$ sont séparables, et si D_i est dénombrable et dense dans E_i, alors $D_1 \times \ldots \times D_k$ est dénombrable et dense dans $E_1 \times \ldots \times E_k$. □

Corollaire 1.7.7 *Si E_1 et E_2 sont deux espaces métriques séparables, alors la tribu borélienne de $E_1 \times E_2$ est égale à la tribu produit* $\mathrm{Bor}(E_1) \otimes \mathrm{Bor}(E_2)$.

Preuve. Comme $E_1 \times E_2$ est séparable, la propriété de Lindelöf entraîne que tout ouvert de $E_1 \times E_2$ est réunion *dénombrable* de pavés ouverts $V_1 \times V_2$. Ces pavés ouverts appartiennent à $\mathrm{Bor}(E_1) \otimes \mathrm{Bor}(E_2)$, donc tout ouvert de $E_1 \times E_2$ appartient à $\mathrm{Bor}(E_1) \otimes \mathrm{Bor}(E_2)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Bor}(E_1 \times E_2) \subseteq \mathrm{Bor}(E_1) \otimes \mathrm{Bor}(E_2)$. L'inclusion inverse est toujours vérifiée, que les E_i soient séparables ou non. □

Proposition 1.7.8 *Dans un espace métrique séparable, toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints est dénombrable.*

Preuve. Soit E un espace métrique séparable, et soit D une partie dénombrable dense de E. Enfin, soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides de E deux à deux disjoints. Comme D est dense dans E, on peut, pour chaque $i \in I$, choisir un point $x_i \in D$ tel que $x_i \in O_i$. Comme les O_i sont deux à deux disjoints, on a $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, autrement dit l'application $i \mapsto x_i$ est injective. On a donc trouvé une injection de I dans l'ensemble dénombrable D, ce qui prouve que I est dénombrable. □

Corollaire 1.7.9 *Dans un espace pré-hilbertien séparable, toute famille orthonormale de vecteurs est dénombrable.*

Preuve. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale dans un espace pré-hilbertien séparable H. Si $i \neq j$, alors, d'après le théorème de Pythagore, on a $||x_i - x_j||^2 = ||x_i||^2 + ||x_j||^2 = 2$, donc $||x_i - x_j|| = \sqrt{2}$. Par conséquent, les boules ouvertes $B_i = B(x_i, \sqrt{2}/2)$ sont deux à deux disjointes, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 1.7.10 *L'espace* $(\ell^\infty(\mathbb{N}), || \,.\, ||_\infty)$ *n'est* pas *séparable.*

Preuve. Posons $\Delta = \{0; 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$. Si $\alpha, \beta \in \Delta$ et $\alpha \neq \beta$, alors $|\alpha(n) - \beta(n)| = 1$ pour au moins un $n \in \mathbb{N}$, donc $||\alpha - \beta||_\infty = 1$. Par conséquent, les boules ouvertes $B_\alpha = B(\alpha, 1/2)$ sont deux à deux disjointes. Comme Δ est non dénombrable, cela prouve que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.□

Chapitre 2

Espaces complets

2.1 Définition et exemples

Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n) \subset E$ est une **suite de Cauchy** pour la distance d si "les termes de la suite finissent par être arbitrairement proches", autrement dit si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall p, q \geq N \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon \,.$$

L'espace métrique (E, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy de (E, d) est convergente. Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet. Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel normé pré-hilbertien et complet.

Les remarques suivantes sont très simples, mais importantes.

Remarque 1 *Dans un espace vectoriel normé, toute suite de Cauchy est bornée. La réciproque est fausse.*

Remarque 2 *Soit E est un espace vectoriel. Si $|| \, . \, ||$ et $||| \, . \, |||$ sont deux normes équivalentes sur E, alors $|| \, . \, ||$ et $||| \, . \, |||$ possèdent les mêmes suites de Cauchy. Par conséquent, E est complet pour $|| \, . \, ||$ si et seulement si il l'est pour $||| \, . \, |||$.*

Ce résultat est faux dans le cadre des espaces métriques : si d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes sur un même ensemble E, alors E peut très bien être complet pour d_1 sans être complet pour d_2 (voir 2.1.5 pour un exemple).

Exemple 1 $\mathbb{R}$ *est complet pour la distance usuelle.*

Exemple 2 $\mathbb{Q}$ *n'est* pas *complet pour la distance usuelle.*

Preuve. Si (r_n) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors (r_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 3 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Preuve. Par équivalence des normes, on peut se ramener au cas de $(\mathbb{R}^d, ||\ .\ ||_\infty)$. Si une suite (x_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{R}^d, ||\ .\ ||_\infty)$, alors elle est "de Cauchy coordonnée par coordonnée" car $|x_p(i) - x_q(i)| \leq ||x_p - x_q||_\infty$ pour tous p, q et pour tout $i \in \{1; \ldots; d\}$, donc (x_n) converge "coordonnée par coordonnée" par complétude de $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$, autrement dit (x_n) converge dans $(\mathbb{R}^d, ||\ .\ ||_\infty)$. $\square$

Exemple 4 *Soit T un ensemble quelconque. Si $(F, ||\ .\ ||_F)$ est un espace de Banach, alors l'espace $\ell^\infty(T, F)$ est complet pour la norme $||\ .\ ||_\infty$. En particulier, $\ell^\infty(T, \mathbb{K})$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit F un espace de Banach, et soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(\ell^\infty(T, F), ||\ .\ ||_\infty)$. Pour tout point $t \in T$ et pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a $||f_p(t) - f_q(t)||_F \leq ||f_p - f_q||_\infty$ par définition de la norme $||\ .\ ||_\infty$; par conséquent, chaque suite $(f_n(t))$ est de Cauchy dans F. Comme F est supposé complet, on en déduit que pour tout $t \in T$, la suite $(f_n(t))$ possède une limite $f(t) \in F$. Il reste à voir que la fonction $f : T \to F$ ainsi définie appartient à $\ell^\infty(T, F)$, et que (f_n) converge vers f au sens de la norme $||\ .\ ||_\infty$.
Comme (f_n) est de Cauchy pour $||\ .\ ||_\infty$, elle est bornée pour $||\ .\ ||_\infty$. Il existe donc une constante M telle que $||f_n(t)||_F \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout t. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $||f(t)||_F \leq M$ pour tout $t \in T$, ce qui prouve que f est bornée, autrement dit $f \in \ell^\infty(T, F)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) est de Cauchy pour $||\ .\ ||_\infty$, on peut trouver un entier N tel que $||f_p - f_q||_\infty \leq \varepsilon$ pour $p, q \geq N$, autrement dit $||f_p(t) - f_q(t)||_F \leq \varepsilon$ pour $p, q \geq N$ et pour tout $t \in T$. En faisant tendre q vers l'infini, on obtient $||f_p(t) - f(t)||_F \leq \varepsilon$ pour $p \geq N$ et pour tout $t \in T$, autrement dit $||f_p - f||_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq N$. Cela montre que (f_n) converge vers f pour la norme $||\ .\ ||_\infty$. $\square$

On traduit souvent la complétude de $\ell^\infty(T, \mathbb{K})$ de la manière suivante : *si une suite de fonctions bornées est "uniformément de Cauchy", alors elle converge uniformément.* Voici un exemple d'utilisation.

Exemple 5 *Si $[a; b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné, alors l'espace $\mathcal{C}^1([a; b])$ est complet pour la norme $||\ .\ ||_{\mathcal{C}^1}$ définie par $||f||_{\mathcal{C}^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.*

Preuve. Soit $(f_n) \subset \mathcal{C}^1([a; b])$ une suite de Cauchy pour $||\ .\ ||_{\mathcal{C}^1}$. Par définition de $||\ .\ ||_{\mathcal{C}^1}$, on voit que les deux suites (f_n) et (f'_n) sont uniformément de Cauchy. Ces deux suites sont donc uniformément convergentes : il existe deux fonctions f et g telles que $f_n \to f$ uniformément et $f'_n \to g$ uniformément. D'après un théorème bien connu, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$. Ainsi, $f_n \to f$ uniformément et $f'_n \to f'$ uniformément, autrement dit (f_n) converge vers f pour $||\ .\ ||_{\mathcal{C}^1}$. $\square$

Exemple 6 *Si (T, μ) est un espace mesuré, alors $(L^p(T, \mu), ||\ .\ ||_p)$ est complet pour tout $p \in [1; \infty]$: c'est le* **théorème de Riesz-Fisher**. *En particulier, les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ sont complets pour leurs normes naturelles* (faire la démonstration "à la main" est un bon exercice)*, et $L^2(T, \mu)$ est un espace de Hilbert.*

Proposition 2.1.1 *Soit (E,d) un espace métrique, et soit A une partie de E.*
(1) *Si A est complète pour d, alors A est fermée dans E.*
(2) *Si (E,d) est supposé complet, alors A est complète pour d si et seulement si A est une partie fermée de E.*

Preuve. Supposons (A,d) complet, et montrons que l'ensemble A est fermé dans E. Soit $(x_n) \subset A$ convergeant vers un point $x \in E$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy pour d, donc, comme (A,d) est supposé complet, (x_n) doit converger vers un point de A ; ainsi, $x \in A$.
Supposons maintenant (E,d) complet et A fermé dans E. Soit (x_n) une suite de Cauchy de (A,d). Comme (E,d) est complet, (x_n) converge vers un point $x \in E$, et comme A est fermé dans E, on a $x \in A$. Ainsi (x_n) converge dans A, ce qui prouve que (A,d) est complet. □

Corollaire 2.1.2 *Si $[a;b]$ est un intervalle fermé borné, alors l'espace $(\mathcal{C}([a;b]), ||\ .\ ||_\infty)$ est complet. Plus généralement, si E est un espace métrique, F un espace de Banach, et si on note $\mathcal{C}_b(E,F)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : E \to F$ continues bornées, alors $\mathcal{C}_b(E,F)$ est complet pour la norme $||\ .\ ||_\infty$.*

Preuve. $\mathcal{C}_b(E,F)$ est fermé dans $(\ell^\infty(E,F), ||\ .\ ||_\infty)$, car une limite uniforme de fonctions continues est continue. □

Corollaire 2.1.3 *L'espace $(c_0(\mathbb{N}), ||\ .||_\infty)$ est un espace de Banach.*

Preuve. c_0 est fermé dans $(\ell^\infty, ||\ .\ ||_\infty)$. □

Corollaire 2.1.4 *Si E est un espace vectoriel normé, alors tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie est fermé dans E.*

D'après la proposition précédente, un ouvert d'un espace métrique complet n'est a priori pas complet pour la distance induite. On a cependant le résultat suivant, qui montre en particulier que la complétude n'est pas une propriété topologique mais bien une propriété *métrique*, c'est-à-dire une propriété du couple (E,d).

Remarque 2.1.5 *Soit (E,d) un espace métrique, et soit O un ouvert de E. Pour $x, y \in O$, posons*

$$\delta(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, E \setminus O)} - \frac{1}{d(y, E \setminus O)} \right|.$$

(1) *δ est une distance sur O, équivalente à la distance d.*
(2) *Si (E,d) est complet, alors O est complet pour δ.*

La preuve est un exercice instructif. □

On dit qu'une série $\sum x_n$ dans un espace vectoriel normé E est **absolument convergente** si la série numérique $\sum ||x_n||$ est convergente. Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 2.1.6 *Si E est un espace de Banach, alors toute série absolument convergente à termes dans E est convergente dans E.*

Preuve. Soit E un espace de Banach, et soit $\sum x_n$ une série absolument convergente à termes dans E. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_0^n x_k$. Pour $p < q$, on a

$$||S_q - S_p|| = \left\| \sum_{p+1}^{q} x_k \right\| \leq \sum_{p+1}^{q} ||x_k|| \,.$$

Comme la série $\sum ||x_n||$ est convergente, cela prouve que la suite (S_n) est de Cauchy dans E. Comme E est complet, on a donc montré que la série $\sum x_n$ est convergente dans E. □

Il se trouve que le théorème précédent caractérise les espaces de Banach :

Proposition 2.1.7 *Soit E un espace vectoriel normé. Si toute série absolument convergente à termes dans E est convergente, alors E est complet.*

Preuve. Supposons que toute série absolument convergente à termes dans E soit convergente. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. En prenant $\varepsilon = 2^{-n}$ dans la définition d'une suite de Cauchy, on voit qu'on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers (p_n) telle que $||x_q - x_{p_n}|| \leq 2^{-n}$ pour tout n et pour tout $q > p_n$. En particulier, on a $||x_{p_{n+1}} - x_{p_n}|| \leq 2^{-n}$, donc la série $\sum(x_{p_{n+1}} - x_{p_n})$ est absolument convergente. Cette série est donc convergente dans E, et comme on a $\sum_0^{n-1}(x_{p_{k+1}} - x_{p_k}) = x_{p_n} - x_{p_0}$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit que la suite (x_{p_n}) converge vers un certain $x \in E$. En utilisant à nouveau la définition d'une suite de Cauchy, on montre alors sans difficulté que la suite (x_n) tout entière converge vers x. □

Exemple 1 *Complétude de L^1*

Comme illustration de la propriété précédente, démontrons la complétude de l'espace $L^1(T, \mu)$. Soit $\sum f_n$ une série absolument convergente à termes dans L^1 : on a donc par définition $\sum_0^\infty ||f_n||_1 < \infty$. Posons $g(t) = \sum_0^\infty |f_n(t)|$. La fonction g est une fonction mesurable positive bien définie, à valeurs éventuellement infinies. De plus, d'après le théorème d'interversion série-intégrale, on a $\int_T g\, d\mu = \sum_0^\infty \int_T |f_n|\, d\mu = \sum_0^\infty ||f_n||_1 < \infty$. Ainsi, g est intégrable, donc en particulier finie presque partout. La série $\sum f_n(t)$ est donc presque partout absolument convergente, donc presque partout convergente, et la fonction $f = \sum_0^\infty f_n$, maintenant bien définie, est intégrable puisque $|f| \leq g$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|| \sum_0^n f_k - f||_1 \leq \sum_{k>n} ||f_k||_1$, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge en norme L^1 vers f. □

Exemple 2 *Quotients*

Soit X un espace vectoriel normé, et soit E un sous-espace vectoriel de X. Si $x \in X$, alors la distance de x à E,

$$d(x, E) = \inf\{\|x - z\|;\ z \in E\}\,,$$

ne dépend que de la classe de x dans l'espace vectoriel quotient X/E. On définit donc sans ambiguité une application $\|\ .\ \|_{X/E} : X/E \to \mathbb{R}^+$ par la formule

$$\|[x]\| = d(x, E)\,,$$

où on a noté $[x]$ la classe de x dans X/E. On vérifie sans difficulté qu'on a $\|\lambda u\|_{x/E} = |\lambda|\, \|u\|_{X/E}$ pour $u \in X/E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et $\|u + v\|_{X/E} \leq \|u\|_{X/E} + \|v\|_{X/E}$ pour $u, v \in X/E$. Si E est de plus *fermé* dans X, alors $\|u\|_{X/E}$ ne peut valoir 0 que si $u = 0$, car pour $x \in X$, on a $d(x, E) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{E} = E$. Ainsi, $\| \, . \, \|_{X/E}$ est une norme sur l'espace quotient X/E, qu'on appelle la **norme quotient** associée à la norme donnée sur X. Par définition de la norme quotient, l'application linéaire quotient

$$\pi : X \to X/E$$

vérifie $\pi(\mathring{B}_X) = \mathring{B}_{X/E}$. En particulier, π est continue et $\|\pi\| = 1$ (voir le chapitre 4).

Proposition 2.1.8 *Si X est un espace de Banach et si E est un sous-espace fermé de X, alors l'espace quotient X/E est un espace de Banach pour la norme quotient $\| \, . \, \|_{X/E}$.*

Preuve. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente à termes dans X/E. La définition de la norme quotient montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_n \in X$ tel que $\pi(x_n) = u_n$ et $\|x_n\| < \|u_n\|_{X/E} + 2^{-n}$. Alors la série $\sum x_n$ est absolument convergente, donc elle converge dans X puisque X est un espace de Banach. Comme π est linéaire continue, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge dans X/E, avec $\sum_0^\infty u_n = \pi(\sum_0^\infty x_n)$. □

2.2 Théorème du point fixe

Le théorème suivant est d'une très grande utilité.

Théorème 2.2.1 (théorème du point fixe)
Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit Z un ensemble contenant E. Soit également $\Phi : E \to Z$. On suppose que Φ vérifie les deux propriétés suivantes.
(1) *E est stable par Φ, autrement dit $\Phi(E) \subset E$;*
(2) *Φ est* **contractante** *pour la distance d, c'est-à-dire lipschitzienne de rapport $k < 1$.*
Alors Φ possède un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point $x_0 \in E$, la suite des itérées $(\Phi^n(x_0))$ converge vers a.

Preuve. Soit $x_0 \in E$, et posons $x_n = \Phi^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \geq 1$, on a $d(x_{i+1}, x_i) = d(\Phi(x_i), \Phi(x_{i-1})) \leq k\, d(x_i, x_{i-1})$. Par récurrence, on en déduit $d(x_{i+1}, x_i) \leq k^i d(x_1, x_0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par conséquent, si $p < q$, alors

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\leq \sum_{i=p}^{q-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{p \leq i < q} k^i \times d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Comme $k < 1$, la série $\sum k^i$ est convergente. Par conséquent, l'inégalité précédente montre que la suite (x_n) est de Cauchy pour d, et converge donc vers un point $a \in E$ puisque E est complet. Comme Φ est lipschitzienne, elle est continue sur E, donc a est un point fixe de Φ. Enfin, si b est un autre point fixe, alors $d(a, b) = d(\Phi(a), \Phi(b)) \leq k\, d(a, b)$; et comme $k < 1$, cela n'est possible que si $d(a, b) = 0$, autrement dit $b = a$. □

Corollaire 2.2.2 *Avec les notations précédentes, on suppose seulement que Φ vérifie* (1) *et qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que Φ^p est contractante. Alors Φ possède un unique point fixe, et pour tout point $x_0 \in E$, la suite $(\Phi^n(x_0))$ converge vers ce point fixe.*

Preuve. Sous ces hypothèses, l'application Φ^p possède un unique point fixe a. Si on pose $b = \Phi(a)$, alors b est aussi point fixe de Φ^p, donc $b = a$ par unicité ; ainsi, a est un point fixe de Φ. Tout point fixe de Φ est également point fixe de Φ^p, donc égal à a, donc a est le seul point fixe de Φ. Enfin, si $x_0 \in E$, alors chaque suite $(\Phi^{i+kp}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$, $i \in \{0; \ldots ; p-1\}$, converge vers a (car $\Phi^{i+kp}(x_0) = (\Phi^p)^k(x_i)$, où $x_i = \Phi^i(x_0)$), donc la suite $(\Phi^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. □

2.2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le théorème du point fixe possède d'innombrables applications spectaculaires. On va en donner seulement une ici : le **théorème de Cauchy-lipschitz**.

Soit X un espace de Banach, et soit $f : [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r) \to X$, où $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha, r > 0$. On s'intéresse au **problème de Cauchy**

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce comme suit.

Théorème 2.2.3 *On fait les hypothèses suivantes.*

(1) f est continue sur $\mathbf{C} = [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r)$, et lipschitzienne par rapport à la variable $x \in \overline{B}(x_0, r)$.

(2) Il existe une constante M telle que $||f(t, x)|| \leq M$ sur $\mathbf{C}$, avec de plus $\alpha M \leq r$.

Alors le problème de Cauchy $(*)$ possède une unique solution $x : [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha] \to \overline{B}(x_0, r)$.

Preuve. On supposera connue la définition de l'intégrale d'une fonction continue $u : [a; b] \to X$, où $[a; b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On reviendra plus loin sur cette définition, voir 4.3. Dans la suite, on pose $I = [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$.
Si $x : I \to \overline{B}(x_0, r)$ est une fonction continue, alors x est solution de $(*)$ si et seulement si elle vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

pour tout point $t \in I$. Autrement dit, si on note $\mathcal{C}(I, \overline{B}(x_0, r))$ l'ensemble des fonctions continues $x : I \to X$ vérifiant $x(I) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$ et $\mathcal{F}(I, X)$ l'ensemble de toutes les fonctions $x : I \to X$, alors x est solution du problème de Cauchy si et seulement si x est un point fixe de l'application $\Phi : \mathcal{C}(I, \overline{B}(x_0, r)) \to \mathcal{F}(I, X)$ définie par

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\, .$$

Il s'agit donc de montrer que Φ possède un unique point fixe.
On vérifie sans difficulté que $E = \mathcal{C}(I, \overline{B}(x_0, r))$ est une partie fermée de $\ell^\infty(I, X)$, et est donc complet pour la distance induite par la norme $||\ .\ ||_\infty$.
Si $x \in \mathcal{C}(I, \overline{B}(x_0, r))$ et $t, t' \in I$ alors :

$$\begin{aligned} ||\Phi(x)(t) - \Phi(x)(t')|| &= \left|\left| \int_{t'}^{t} f(s, x(s))\, ds \right|\right| \\ &\leq \left| \int_{t'}^{t} ||f(s, x(s))||\, ds \right| \\ &\leq M \times |t - t'| \\ &\leq r\, , \end{aligned}$$

la dernière inégalité venant de l'hypothèse (2). On en déduit d'une part que $\Phi(x)$ est M-lipschitzienne, et donc continue ; et d'autre part, en prenant $t' = t_0$, qu'on a $\|\Phi(x)(t) - x_0\| \leq r$ pour tout $t \in I$. Par conséquent, Φ envoie $E = \mathcal{C}(I, \overline{B}(x_0, r))$ dans lui-même.
Montrons maintenant que Φ possède une itérée contractante. L'hypothèse (1) signifie qu'il existe une constante C telle que $||f(s,u) - f(s,v)|| \leq C\,||u - v||$ pour tout $s \in I$ et pour tous $u, v \in \overline{B}(x_0, r)$. On en déduit que si $x, y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} ||\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)|| &\leq \left| \int_{t_0}^t ||f(s, x(s)) - f(s, y(s))||\, ds \right| \\ &\leq C \left| \int_{t_0}^t ||x(s) - y(s)||\, ds \right| \\ &\leq C\,|t - t_0| \times ||x - y||_\infty \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. En remplaçant x et y par $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$, on en déduit

$$\begin{aligned} ||\Phi^2(x)(t) - \Phi^2(y)(t)|| &\leq C \left| \int_{t_0}^t ||\Phi(x)(s) - \Phi(y)(s)||\, ds \right| \\ &\leq C \left| \int_{t_0}^t C\,|s - t_0|\, ||x - y||_\infty\, ds \right| \\ &= \tfrac{C^2 |t - t_0|^2}{2}\, ||x - y||_\infty\,; \end{aligned}$$

puis par récurrence :

$$||\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)|| \leq \frac{C^p |t - t_0|^p}{p!}\, ||x - y||_\infty$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$. On a donc

$$||\Phi^p(x) - \Phi^p(y)||_\infty \leq \frac{C^p \alpha^p}{p!}\, ||x - y||_\infty$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{C^p \alpha^p}{p!}$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini, cela prouve que Φ possède une itérée contractante. Ainsi, toutes les hypothèses du théorème du point fixe sont vérifiées, et la démonstration est terminée. $\square$

Variante. On définit une nouvelle norme $\|\,.\,\|_*$ sur $\mathcal{C}(I, X)$ en posant

$$\|x\|_* = \sup\{e^{-Ct}\, \|x(t)\|;\ t \in I\}\,.$$

On vérifie sans difficulté que $\|\,.\,\|_*$ est équivalente à la norme. $\|\,.\,\|_\infty$. Pour démontrer le résultat souhaité, il suffit donc de vérifier que l'application Φ définie plus haut est contractante *pour la norme* $\|\,.\,\|_*$. Mais si $x, y \in \mathcal{C}(I, \overline{B}(x_0, r))$, alors

$$\begin{aligned} \|\Phi(y)(t) - \Phi(x)(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t C\,\|y(s) - x(s)\|\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t C e^{Cs}\, ds \right| \times \|y - x\|_* \\ &= |e^{Ct} - e^{Ct_0}| \times \|y - x\|_* \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. En multipliant par e^{-Ct} et en passant au sup, on en déduit

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\|_* \leq (1 - e^{-C\alpha})\, \|y - x\|_*\,,$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque Dans le cas d'une équation différentielle linéaire $x'(t) = a(t)x(t)$, où $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on connaît explicitement la solution : elle est donnée par la formule $x(t) = x_0 e^{A(t)}$, où $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\,ds$. Il est amusant de calculer explicitement les "itérées de Picard" $(\Phi^n(\mathbf{x_0}))$, où $\mathbf{x_0}$ est la fonction constante égale à x_0 : on tombe exactement sur les sommes partielles de la série $\sum \frac{A^k}{k!}$.

2.3 Théorème des fermés emboîtés

Proposition 2.3.1 (théorème des fermés emboîtés)
Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit (F_n) une suite de fermés non vides de E. On suppose que la suite (F_n) est décroissante et que le diamètre de F_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Alors l'intersection des F_n est non vide, réduite à un seul point,

Preuve. La condition sur les diamètres entraîne que l'intersection des F_n ne peut pas contenir plus d'un point. En effet, si a, b sont deux points de $\bigcap_n F_n$, alors $d(a, b) \leq \mathrm{diam}(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $d(a, b) = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_n \in F_n$. Si $p < q$, alors x_p et x_q appartiennent à F_p puisque $F_q \subset F_p$, donc $d(x_p, x_q) \leq \mathrm{diam}(F_p)$. Par conséquent, la suite (x_n) est de Cauchy, et converge donc vers un point $x_\infty \in E$. Pour n fixé, on a $x_p \in F_n$ si $p \geq n$, et donc $x_\infty \in F_n$ car F_n est fermé. Ainsi, x_∞ appartient à tous les F_n. $\square$

Voici une illustration nontriviale et typique du théorème des fermés emboîtés.

Exemple *Si (E, d) est un espace métrique complet séparable, alors ou bien E est dénombrable, ou bien $\{0\,;1\}^{\mathbb{N}}$ s'injecte dans E.*

Le résultat découle immédiatement des deux faits suivants. On aura besoin d'une définition : on dit qu'un point x d'un espace métrique X est un **point isolé** de X si $\{x\}$ est un ouvert de X.

Fait 1 *Si E est un espace métrique séparable et non dénombrable, alors E contient un fermé non vide X sans point isolé.*

Preuve. Notons O la réunion de tous les ouverts dénombrables de E. Alors O est un ouvert de E, et comme E est séparable, la propriété de Lindelöf montre que O est dénombrable (donc O est le *plus grand* ouvert dénombrable de E). Comme E est non dénombrable, $X := E \setminus O$ est un fermé non vide de E. Par définition de O, tout ouvert non vide de X est non dénombrable ; donc X n'a pas de point isolé. $\square$

Fait 2 *Si X est un espace métrique complet sans point isolé, alors $\{0\,;1\}^{\mathbb{N}}$ s'injecte dans X.*

Preuve. La preuve repose sur l'observation suivante : comme X n'a pas de point isolé, tout ouvert non vide de X contient au moins deux points, donc pour tout ouvert non vide $V \subset X$, on peut trouver deux ouverts non vides $V^0, V^1 \subset V$ tels que $\overline{V^0} \cap \overline{V^1} = \emptyset$; de plus, les diamètres des V^i peuvent être choisis arbitrairement petits.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies de 0 et de 1. Pour $s \in \mathcal{S}$, on note $|s|$ la longueur de s, et $s0$, $s1$ les suites "s suivie de 0", "s suivie de 1". D'après l'observation précédente, on peut construire une famille $(V_s)_{s\in\mathcal{S}}$ d'ouverts non vides de X vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\overline{V_{si}} \subset V_s$ pour $i = 0,\, 1$;
(2) $\overline{V_{s0}} \cap \overline{V_{s1}} = \emptyset$;
(3) $\mathrm{diam}(V_s) \leq 2^{-|s|}$.

Pour $\alpha \in \{0\,;1\}^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $\alpha_{|n}$ la suite finie $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. D'après (1), (3) et le théorème des fermés emboîtés, l'ensemble $\bigcap_n \overline{V_{\alpha_{|n}}}$ est un singleton, que l'on peut noter $\{\varphi(\alpha)\}$. D'après (2), l'application $\varphi : \{0\,;1\}^{\mathbb{N}} \to X$ est injective. □

2.3.1 Projection sur un convexe fermé

Comme autre illustration du théorème des fermés emboîtés, on va démontrer le très important résultat suivant.

Théorème 2.3.2 *Soit H un espace de Hilbert, et soit $C \subset H$ un ensemble convexe fermé non vide. Pour tout point $a \in H$, il existe un et un seul point $x \in C$ tel que $||x - a|| = d(a, C)$*

Preuve. Quitte à remplacer C par $C - a$, on peut supposer $a = 0$. Il s'agit alors de montrer au'il existe un et un seul point $x \in C$ tel que $||x|| = \inf\{||u||;\ u \in C\}$. Notons m cette borne inférieure, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n = \{x \in C;\ ||x|| \leq m + 2^{-n}\}$. Alors les F_n sont des fermés de l'espace métrique *complet* C, non vides par définition de m. La suite (F_n) est décroissante, et $\bigcap_n F_n$ est exactement l'ensemble des points $x \in C$ vérifiant $||x|| = m$. D'après le théorème des fermés emboîtés, il suffit donc de vérifier que le diamètre de F_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé, et soient $x, y \in F_n$. D'après l'identité du parallélogramme, on a

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(||x||^2 + ||y||^2\right) - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 .$$

Comme C est convexe, on a $\frac{x+y}{2} \in C$ et donc $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq m$. Par définition de F_n, on en déduit

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq \delta_n = \left((m + 2^{-n})^2 - m^2\right)^{1/2} .$$

Comme x et y sont arbitraires dans F_n, on a donc $\mathrm{diam}(F_n) \leq \delta_n$, ce qui termine la démonstration.
□

Remarque. à titre d'exercice, on pourra démontrer la généralisation suivante de l'identité du parallèlogramme : si $x_1, \dots, x_N$ sont des points quelconques de l'espace de Hilbert H, alors

$$\frac{1}{2^N} \sum_{\varepsilon \in \{-1;1\}^N} \| \sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i \|^2 = \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 .$$

2.4 Théorème de Baire

Le résultat suivant est d'une très grande importance.

Théorème 2.4.1 (théorème de Baire)
Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E. Si tous les ouverts O_n sont denses dans E, alors $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est encore dense dans E. En particulier, on a $\bigcap_n O_n \neq \emptyset$.

Preuve. Il s'agit de montrer que si $O \subset E$ est un ouvert non vide, alors $G \cap O \neq \emptyset$. Fixons un tel ouvert O.
Comme O_0 est un ouvert dense de E, l'ensemble $O_0 \cap O$ est un ouvert non vide. Soit $x_0 \in O_0 \cap O$, et choisissons $r_0 \leq 2^{-0}$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset O_0 \cap O$.
Comme O_1 est dense dans E, on a $O_1 \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$ et on peut donc trouver x_1 et $r_1 \leq 2^{-1}$ tels que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 = B(x_0, r_0) \cap O_1 \cap O$.
Par récurrence, on voit qu'on peut construire une suite de boules ouvertes $B_n = B(x_n, r_n)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) & \overline{B}_{n+1} \subset B_n; \\ (2) & r_n \leq 2^{-n}; \\ (3) & \overline{B}_n \subset O_n \cap O. \end{cases}$$

D'après (1), (2) et le théorème des fermés emboîtés, on a alors $\bigcap_n \overline{B}_n \neq \emptyset$. D'après (3), on en déduit $G \cap O \neq \emptyset$. □

Corollaire 2.4.2 *Soit (E, d) un espace métrique complet. Si (F_n) est une suite de fermés d'intérieurs vides dans E, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide. Par conséquent, si (F_n) est une suite de fermés de E telle que $\bigcup_n F_n = E$, alors il existe au moins un entier n tel que $\mathring{F}_n \neq \emptyset$.*

Preuve. C'est immédiat par passage aux complémentaires, puisqu'un ensemble A est dense dans E si et seulement si $E \setminus A$ est d'intérieur vide. □

Corollaire 2.4.3 *Soit (E, d) un espace métrique complet. Si (F_n) est une suite de fermés de E telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$, alors $\Omega := \bigcup_n \mathring{F}_n$ est un ouvert dense dans E.*

Preuve. L'ensemble Ω est ouvert en tant que réunion d'ouverts. De plus, on a

$$E \setminus \Omega = \Big(\bigcup_n F_n\Big) \setminus \Big(\bigcup_n \mathring{F}_n\Big) \subset \bigcup_n (F_n \setminus \mathring{F}_n).$$

Les ensembles $C_n = F_n \setminus \mathring{F}_n$ sont des fermés d'intérieurs vides, donc $E \setminus \Omega \subset \bigcup_n C_n$ est également d'intérieur vide d'après le théorème de Baire. Par conséquent, Ω est dense dans E. □

On dit qu'un espace métrique X est un **espace de Baire** s'il vérifie le théorème de Baire.

Corollaire 2.4.4 *Si (E, d) est un espace métrique complet, alors tout fermé de E est un espace de Baire, et tout ouvert de E également.*

Preuve. Un fermé de E est complet pour la distance d, donc est un espace de Baire. Si O est un ouvert de E, on a vu qu'il existe une distance δ sur O équivalente à d telle que (O, δ) soit complet, donc O est un espace de Baire. On peut aussi démontrer le résultat directement : si (Ω_n) est une suite d'ouverts denses de A, alors les Ω_n sont des ouverts *de* E car A est ouvert dans E. Les ensembles $O_n = \Omega_n \cup (E \setminus \overline{A})$ sont donc des ouverts de E, et on vérifie sans difficulté qu'ils sont denses dans E. En appliquant le théorème de Baire aux O_n, on obtient que $(E \setminus \overline{A}) \cup \bigcap_n \Omega_n$ est dense dans E, d'où on tire que $\bigcap_n \Omega_n$ est dense dans A. $\square$

Remarques
(1) L'ensemble $G = \bigcap_n O_n$ apparaissant dans l'énoncé du théorème de Baire n'a aucune raison d'être un *ouvert* de E.
(2) Bien entendu, le théorème de Baire est valable si, au lieu d'une suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on considère une famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I (fini ou) dénombrable. En revanche, le résultat est complètement faux pour une famille non dénombrable d'ouverts. Pour le voir, il suffit de considérer la famille $(O_x)_{x\in\mathbb{R}}$, où $O_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$. Les O_x sont des ouverts denses de $\mathbb{R}$, mais l'intersection de tous les O_x est vide.

2.4.1 Fonctions continues nulle-part dérivables

Comme première application frappante du théorème de Baire, on va démontrer le résultat suivant. Notons $\mathcal{C}([0;1])$ l'espace des fonctions continues $f : [0;1] \to \mathbb{K}$, muni de la norme $||\ .\ ||_\infty$; on a vu plus haut que $\mathcal{C}([0;1])$ est un espace de Banach.

Théorème 2.4.5 *L'ensemble des fonction continues nulle part dérivable est dense dans* $\mathcal{C}([0;1])$. *En particulier, il* existe *des fonctions continues nulle part dérivables.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{U}_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0;1]);\ \forall x \in [0;1]\quad \sup_{y\neq x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} > n \right\}.$$

Fait 1 *Chaque* $\mathcal{U}_n$ *est un ouvert de* $\mathcal{C}([0;1])$.

Preuve. Fixons n, et posons $\mathcal{F}_n = \mathcal{C}([0;1]) \setminus \mathcal{U}_n$. Par définition, une fonction f appartient à $\mathcal{F}_n$ si et seulement si et seulement si il existe un point $x \in [0;1]$ tel que la propriété suivante ait lieu :

$$(*) \qquad\qquad \forall y \in [0;1]\quad |f(y) - f(x)| \leq n\,|x-y|\,.$$

Notons $\mathbf{F}$ l'ensemble des couples $(x, f) \in [0;1] \times \mathcal{C}([0;1])$ vérifiant la propriété $(*)$. Comme l'application $(x,f) \mapsto f(x)$ est continue sur $[0;1] \times \mathcal{C}([0;1])$, on voit que l'ensemble $\mathbf{F}$ est un fermé de $[0;1] \times \mathcal{C}([0;1])$; et par définition de $\mathbf{F}$, on a l'équivalence

$$f \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \exists x \in [0;1]\quad (x,f) \in \mathbf{F}\,.$$

Comme $[0\,;1]$ est compact, on en déduit (cf l'exemple 3.3.3 traité plus loin) que $\mathcal{F}_n$ est fermé dans $\mathcal{C}([0;1])$, et donc que $\mathcal{U}_n$ est ouvert. $\square$

Fait 2 *Chaque* $\mathcal{U}_n$ *est dense dans* $\mathcal{C}([0;1])$.

Preuve. On sait que l'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $\mathcal{C}([0;1])$: cela vient par exemple du fait que toute fonction continue est limite uniforme de fonctions affines par morceaux, ou du théorème de Weierstrass. Pour montrer que $\mathcal{U}_n$ est dense dans $\mathcal{C}([0;1])$, il suffit donc de montrer qu'on peut approcher toute fonction lipschitzienne $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ par un élément de $\mathcal{U}_n$. Fixons g, et fixons $\varepsilon > 0$. On cherche $f \in \mathcal{U}_n$ telle que $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$.
Comme g est lipschitzienne, il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\left|\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right| \leq C$$

pour tous $x, y \in [0;1]$, $x \neq y$.
Soit $M > 0$ à fixer ultérieurement, et soit $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue affine par morceaux de pente partout supérieure à M et vérifiant $||\theta||_\infty \leq \varepsilon$. Enfin, posons $f = g + \theta$. On a évidemment $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$. Si x est un point quelconque de $[0;1]$, alors on peut trouver $y \neq x$ tel que

$$\left|\frac{\theta(y) - \theta(x)}{y - x}\right| \geq M\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| &\geq M - \left|\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right| \\ &\geq M - C \\ &> n\end{aligned}$$

si on a choisi $M > n + C$. Comme le point x est arbitraire, on en déduit que la fonction f appartient à $\mathcal{U}_n$. Cela termine la preuve du fait 2. □

D'après le théorème de Baire l'intersection de tous les ouverts $\mathcal{U}_n$ est dense dans $\mathcal{C}([0;1])$. Comme il est clair qu'une fonction $f \in \bigcap_n \mathcal{U}_n$ n'est dérivable en aucun point, cela termine la preuve du théorème. □

Le théorème précédent est un peu mystérieux, car il affirme qu'il existe "beaucoup" de fonctions continues nulle part dérivables, mais n'en exhibe aucune. Voici un exemple explicite : la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty 2^{-n} \sin(4^n x)$$

est continue par convergence normale de la série. Elle est également nulle part dérivable, ce qui n'a rien d'évident.

2.4.2 Limites simples de fonctions continues

On sait que si une suite (f_n) de fonctions continues converge simplement vers une fonction f, alors f n'est pas nécessairement continue. On a cependant le résultat suivant.

Théorème 2.4.6 *Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit (f_n) une suite de fonctions continues, $f_n : E \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points de continuité de f est dense dans E ; en particulier, f possède au moins 1 point de continuité.*

Preuve. Notons $\mathrm{Cont}(f)$ l'ensemble des points de continuité de f. Pour $\varepsilon > 0$, posons

$$O_\varepsilon = \{x \in E;\ \exists V \text{ voisinage ouvert de } x \text{ tel que } \forall y, z \in V \ \ |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon\}\,.$$

Par définition, chaque ensemble O_ε est ouvert dans E. De plus, on vérifie facilement qu'on a

$$\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} O_{1/p} = \mathrm{Cont}(f)\,.$$

D'après le théorème de Baire, il suffit donc de montrer que chaque ouvert O_ε est dense dans E ; fixons $\varepsilon > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F_n = \{x \in E;\ \forall p, q \geq n \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon/3\}\,.$$

Comme les fonctions f_n sont continues, les ensembles F_n sont des fermés de E. De plus, comme la suite (f_n) converge simplement, elle est de Cauchy en tout point, et on a donc $\bigcup_n F_n = E$. D'après le théorème de Baire (voir 2.4.3), on en déduit que $\Omega = \bigcup_n \mathring{F}_n$ est dense dans E. On va montrer que Ω est contenu dans O_ε, ce qui terminera la démonstration.
Soit $x \in \Omega$. Par définition, il existe donc un entier n_0 et un voisinage ouvert V_1 de x tels que $V_1 \subset F_{n_0}$. Pour $y, z \in V_1$, on a alors

$$\begin{aligned} |f_p(y) - f_p(z)| &\leq |f_p(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_p(z)| \\ &\leq \varepsilon/3 + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)| + \varepsilon/3\,. \end{aligned}$$

En faisant tendre p vers l'infini, on en déduit

$$|f(y) - f(z)| \leq 2\varepsilon/3 + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)|$$

pour tous $y, z \in V_1$. Mais la fonction f_{n_0} étant continue, on peut trouver un voisinage ouvert V_2 de x tel que $|f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)| \leq \varepsilon/3$ pour $y, z \in V_2$. Si on pose $V = V_1 \cap V_2$, on a alors

$$|f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$$

pour tous $y, z \in V$. Cela prouve que $x \in O_\varepsilon$. $\square$

Chapitre 3

Espaces métriques compacts

3.1 Définition et exemples

Définition 3.1.1 *Soit (E,d) un espace métrique.*
(1) *On dit qu'un point $x \in E$ est une* **valeur d'adhérence** *d'une suite $(x_n) \subseteq E$ s'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.*
(2) *L'espace métrique E est dit* **compact** *si toute suite $(x_n) \subseteq E$ possède au moins une valeur d'adhérence dans E.*
(3) *On dit qu'un ensemble $A \subseteq E$ est un* **compact de** *E si l'espace métrique (A,d) est compact.*

Notons que, contrairement à la complétude, le fait qu'un espace métrique (E,d) soit compact ou non ne dépend que de la topologie définie par la distance d.

Exemple 1 *Tout intervalle fermé borné $[a\,;b] \subseteq \mathbb{R}$ est compact : c'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.*

Les remarques qui suivent sont importantes.

Remarque 3.1.2 *Si une suite de Cauchy dans (E,d) possède une valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur d'adhérence. Par conséquent, tout espace métrique compact est complet.*

La preuve est laissée en exercice. □

Exemple 2 $\mathbb{R}$ est complet pour la distance usuelle, mais il n'est pas compact. Par exemple, la suite (x_n) définie par $x_n = n$ ne possède aucune sous-suite convergente.

Remarque 3.1.3 *Soit E un espace métrique.*
(1) *Tout ensemble compact $A \subseteq E$ est fermé.*
(2) *Si E est compact, alors tout fermé de E est compact.*
(3) *Si E est un espace vectoriel normé, alors tout sous-ensemble compact de E est fermé borné.*

Preuve. (1) Soit A un compact de E, et soit (x_n) un suite de points de A convergeant vers un point $x \in E$. Par compacité de A, la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence *dans* A. Mais x est la

seule valeur d'adhérence possible pour (x_n), par "unicité de la limite". Donc $x \in A$, ce qui prouve que A est fermé dans E.
(2) Supposons E compact et A fermé dans E. Si (x_n) est une suite de points de A, alors (x_n) possède une valeur d'adhérence $x \in E$ car E est compact, et on a $x \in A$ car A est fermé. Par conséquent, A est compact.
(3) On sait déjà qu'un compact de E est fermé dans E. Si $A \subseteq E$ est non borné, alors on peut construire une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $||x_n|| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors aucune sous-suite de (x_n) n'est bornée, donc (x_n) ne possède aucune valeur d'adhérence. Par conséquent, A n'est pas compact. Ainsi, tout ensemble compact est borné. $\square$

Exemple 3 La boule unité de $\ell^2(\mathbb{N})$ est fermée et bornée dans $\ell^2(\mathbb{N})$, mais elle n'est pas compacte.

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $e_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la n-ième qui vaut 1. Alors $||e_n||_2 = 1$ pour tout n, et $||e_p - e_q||_2 = \sqrt{2}$ si $p \neq q$. Par conséquent, (e_n) est une suite de B_{ℓ^2} qui ne possède aucune sous-suite convergente. $\square$

Exemple 4 (fondamental)
Dans une espace vectoriel normé de dimension finie*, les ensembles compacts sont exactement les ensembles fermés bornés.*

Preuve. On a déjà montré que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée possède une sous-suite convergente. On en déduit très facilement que dans un tel espace, tout ensemble fermé borné est compact. La réciproque a déjà été démontrée. $\square$

Remarque 3.1.4 *Soit (E,d) un espace métrique compact, et soit $a \in E$. Si a est la seule valeur d'adhérence possible d'une suite $(x_n) \subseteq E$, alors (x_n) converge vers a.*

Preuve. Si (x_n) ne converge pas vers a, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (x'_n) de (x_n) telle que $d(x'_n, a) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme E est compact, la suite (x'_n) possède une sous-suite (x''_n) qui converge vers un point $b \in E$. Alors b est une valeur d'adhérence de (x_n), et $d(b,a) \geq \varepsilon > 0$, donc $b \neq a$, ce qui est absurde par hypothèse. $\square$

Remarque 3.1.5 *Toute réunion finie d'ensembles compacts est un compact. En particulier, tout ensemble fini est compact.*

Preuve. Soient $K_1, \dots, K_m$ des compacts d'un espace métrique E, et soit $K = \bigcup_1^m K_i$. Si (x_n) est une suite de points de K, alors l'un des K_i doit contenir une infinité de termes de la suite (x_n). Il existe donc un indice i_0 et une sous suite (x'_n) de (x_n) tels que $x'_n \in K_{i_0}$ pour tout n. Comme K_{i_0} est compact, la suite (x'_n) possède une valeur d'adhérence $x \in K_{i_0}$. Alors $x \in K$ et x est également une valeur d'adhérence de (x_n) : cela prouve que K est compact. Ainsi, toute réunion finie de compacts est un compact. Comme un singleton est visiblement compact, on en déduit que tout ensemble fini est compact. $\square$

Exemple 5 *Soit (E, d) un espace métrique. Si (x_n) est une suite de points de E convergeant vers un point $x \in E$, alors $K = \{x\} \cup \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E.*

La preuve est un exercice instructif. Elle serait plus simple en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, dont on parlera plus loin. $\square$

Définition 3.1.6 *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $A \subseteq E$ est* **relativement compact** *dans E si $\overline{A}$ est un compact de E.*

Par exemple, l'intervalle $]0\,;1[$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$, mais il n'est pas compact.

La définition de la relative compacité se reformule comme suit.

Remarque 3.1.7 *Soit (E, d) un espace métrique. Un ensemble $A \subseteq E$ est relativement compact dans E si et seulement si toute suite $(x_n) \subseteq A$ possède au moins une valeur d'adhérence* dans E.

Preuve. Si A est relativement compact, alors $\overline{A}$ est compact, donc toute suite $(x_n) \subseteq A \subseteq \overline{A}$ possède au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{A} \subseteq E$. Inversement, supposons que toute suite $(x_n) \subseteq A$ possède au moins une valeur d'adhérence dans E. Soit (x_n) une suite de points de $\overline{A}$. Par définition de l'adhérence, on peut, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, trouver un point $y_n \in A$ tel que $d(x_n, y_n) < 2^{-n}$. Par hypothèse, la suite $(y_n) \subseteq A$ possède une sous-suite (y_{n_k}) qui converge vers un point $a \in E$. Alors $a \in \overline{A}$ puisque les y_{n_k} sont dans A, et comme $d(x_{n_k}, y_{n_k})$ tend vers 0, la suite (x_{n_k}) converge également vers a. On a donc montré que toute suite $(x_n) \subset \overline{A}$ possède une valeur d'adhérence dans $\overline{A}$, autrement dit que $\overline{A}$ est compact. $\square$

3.2 Théorème des compacts emboîtés

Le résultat suivant est évidemment à comparer au théorème des fermés emboîtés **??**.

Proposition 3.2.1 *Soit (E, d) un espace métrique compact. Si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides de E, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. De manière équivalente, si (F_n) est une suite décroissante de fermés de E telle que $\bigcap_n F_n = \emptyset$, alors l'un des F_n est déjà vide.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_n \in F_n$. Comme E est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers un point $x_\infty \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $n_k \geq n$ si k est assez grand, et donc $F_{n_k} \subseteq F_n$. Ainsi, $x_{n_k} \in F_n$ pour k assez grand, donc $x_\infty = \lim_k x_{n_k} \in F_n$ car F_n est fermé. Le point x_∞ appartient donc à tous les F_n. $\square$

Corollaire 3.2.2 (théorème des compacts emboîtés)
Soit (E, d) un espace métrique. Si (K_n) est une suite décroissante de compacts non vides de E, alors $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

Preuve. On applique la proposition à l'espace métrique compact K_0 et aux ensembles $F_n = K_n \subseteq K_0$, qui sont fermés dans K_0 car compacts. $\square$

Corollaire 3.2.3 *Soit (E, d) un espace métrique, et soit O un ouvert de E. Si (K_n) est une suite décroissante de compacts de E telle que $\bigcap_n K_n \subseteq O$, alors l'un des K_n est déjà contenu dans O.*

Preuve. On applique le corollaire précédent à $\tilde{K}_n = K_n \setminus O$. Chaque $\tilde{K}_n$ est compact, car fermé dans le compact K_n. $\square$

Comme application du théorème des compacts emboîtés, on va démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.2.4 (théorème de Dini)
Soit K un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite de fonctions continues sur K, à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n) est monotone, et converge simplement vers une fonction f continue. Alors la convergence est en fait uniforme.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F_n = \{x \in K;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\,.$$

Comme f et les f_n sont continues, les F_n sont des fermés de K ; et comme la suite (f_n) est monotone et a pour limite f, la suite (F_n) est décroissante. De plus, on a

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x;\ \forall n\ :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

puisque la suite (f_n) converge simplement vers f. D'après le théorème des compacts emboîtés, il existe un entier N tel que $F_N = \emptyset$. Alors $F_n = \emptyset$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit, si $n \geq N$, alors $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in K$. Cela prouve que la suite (f_n) converge uniformément vers f. $\square$

Voici enfin une réciproque parfois utile au théorème des compacts emboîtés.

Remarque 3.2.5 *Soit (E, d) un espace métrique. On suppose que toute suite décroissante de fermés non vides de E a une intersection non vide. Alors E est compact.*

Preuve. Soit (x_n) une suite de points de E, et notons $\mathrm{vad}((x_n))$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). On vérifie sans difficulté majeure qu'on a

$$\mathrm{vad}((x_n)) = \bigcap_n \overline{\{x_p;\ p \geq n\}}\,.$$

Si on pose $F_n = \overline{\{x_p;\ p \geq n\}}$, alors les F_n sont des fermés non vides de E et la suite (F_n) est décroissante. Par conséquent, $\mathrm{vad}((x_n)) = \bigcap_n F_n$ est non vide, ce qui est le résultat souhaité. $\square$

3.3 Fonctions continues sur un compact

Les résultats qu'on démontre ici sont simples mais fondamentaux.

3.3.1 Image continue d'un compact

Théorème 3.3.1 *Soit K un espace métrique compact, et soit F un espace métrique. Si $f : K \to F$ est continue, alors $f(K)$ est un compact de F.*

Preuve. Soit (y_n) une suite de points de $f(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme K est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers un point $x \in K$. Comme f est continue, $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ tend vers $y := f(x)$ quand k tend vers l'infini. Ainsi, y est une valeur d'adhérence de (y_n) appartenant à $f(K)$. Cela termine la démonstration. □

Voici deux exemples d'utilisation du théorème 3.3.1. On donnera d'autres applications à la section suivante.

Le premier exemple montre qu'une bijection continue d'un espace métrique compact sur un espace métrique est nécessairement un **homéomorphisme**.

Exemple 3.3.2 *Soient E et F deux espaces métriques, avec E compact. Si $f : E \to F$ est une bijection continue, alors f^{-1} est continue.*

Preuve. Posons $g = f^{-1}$. Si C est un fermé de E, alors C est compact puisque E l'est, donc $g^{-1}(C) = f(C)$ est compact, et est donc fermé dans F. Cela prouve que g est continue. □

Si E n'est pas supposé compact, alors on ne peut pas conclure à la continuité "automatique" de f^{-1}. Par exemple, l'application $f : [0; 2\pi[\to \mathbb{T}$ définie par $f(t) = e^{it}$ est une bijection continue de $[0; 2\pi[$ sur $\mathbb{T}$, mais f^{-1} n'est pas continue. En effet, $e^{\pm \frac{i}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, mais $f^{-1}(e^{\frac{i}{n}}) = \frac{1}{n}$ tend vers 0 et $f^{-1}(e^{-\frac{i}{n}}) = 2\pi - \frac{1}{n}$ tend vers 2π.

Le deuxième exemple montre que la projection d'un fermé d'un espace produit le long d'un compact est encore un fermé. Ce résultat, plus général que 3.3.1, est souvent utile.

Exemple 3.3.3 *Soient E et K deux espaces métriques, avec K compact. Soit également C une partie de $K \times E$, et posons*

$$\exists^K C = \{x \in E;\ \exists u \in K \quad (u, x) \in C\}.$$

Si C est fermé dans $K \times E$, alors $\exists^K C$ est un fermé de E.

Preuve. Il n'est pas difficile de démontrer directement ce résultat, en utilisant seulement la définition de la compacité : la preuve serait identique à celle de 3.3.1. On va donner ici une démonstration volontairement "alambiquée".
Notons $\pi : K \times E \to E$ la deuxième application coordonnée. Par définition, on a $\exists^K C = \pi(C)$. L'application π est continue, et possède la propriété suivante : pour tout compact $\Gamma \subseteq E$, l'ensemble $\pi^{-1}(\Gamma)$ est un compact de $K \times E$. En effet, on a $\pi^{-1}(\Gamma) = K \times \Gamma$, et on verra plus loin qu'un produit de deux compacts est compact. Soit maintenant (x_n) une suite de points de $\exists^K C = \pi(C)$ convergeant vers un point $x \in E$. Alors $\Gamma = \{x\} \cup \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E, donc $\pi^{-1}(\Gamma)$ est un compact de $K \times E$ d'après ce qu'on vient de voir, et donc $\tilde{C} = C \cap \pi^{-1}(\Gamma)$ également puisque C est fermé dans $K \times E$. Comme l'application π est continue, on en déduit que $\pi(\tilde{C})$ est un compact de E, et est donc fermé dans E. Comme $x_n \in \pi(\tilde{C})$ pour tout n, on a donc $x \in \pi(\tilde{C})$, et donc $x \in \pi(C) = \exists^K C$. Cela prouve que $\exists^K C$ est un fermé de E. □

Remarque 1. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est dite **propre** si pour tout compact $\Gamma \subseteq Y$, l'ensemble $f^{-1}(\Gamma)$ est un compact de X. La démonstration précédente a en fait établi que toute application continue et propre $f : X \to Y$ change les fermés en fermés. A titre d'exercice, on pourra vérifier qu'une application continue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est propre si et seulement si on a $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$.

Remarque 2. Si $f : K \to F$ est une application continue, alors le graphe de f est un fermé de $K \times F$, et $f(K) = \exists^K G_f$. Par conséquent, 3.3.3 est plus général que le théorème 3.3.1.

3.3.2 Optimisation

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de 3.3.1, mais il est suffisamment important pour être énoncé séparément.

Théorème 3.3.4 *Si K est un espace métrique compact, alors toute fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. L'ensemble $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc il est borné, ce qui prouve que f est bornée, et fermé, ce qui prouve que f atteint ses bornes. □

Corollaire 3.3.5 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty$, alors f est minorée atteint sa borne inférieure.*

Preuve. Par hypothèse, on peut trouver $R > 0$ tel que $f(x) > 1 + f(0)$ si $||x|| > R$. On a alors $\inf_E f = \inf_B f$, où B est la boule fermée $\overline{B}(0, R)$. Comme E est de dimension finie, B est compacte, donc on peut appliquer 3.3.4. □

Autre preuve. On peut aussi démontrer 3.3.5 directement, sans utiliser 3.3.4. Posons $m = \inf f \in [-\infty; +\infty[$, et choisissons une suite $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$ strictement décroissante ayant pour limite m. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$K_n = \{x;\ f(x) \leq \alpha_n\}\,.$$

Comme f est continue, les K_n sont des fermés de E, et ils sont également bornés car $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty$; comme E est de dimension finie, les K_n sont donc compacts. De plus, les K_n sont non vides car $\alpha_n > m$ pour tout n, et la suite (K_n) est visiblement décroissante. D'après le théorème des compacts emboîtés, on a donc $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$. Il existe ainsi un point $x \in E$ tel que $f(x) \leq m$, ce qui prouve en même temps que $m > -\infty$, autrement dit que f est minorée, et que f atteint sa borne inférieure. □

Donnons maintenant quelques illustrations de 3.3.4.

Exemple 0 *Si K est un compact de $\Omega := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geq \varepsilon$ pour tout $z \in K$. Si K est un compact du disque unité ouvert $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$, alors il existe $r < 1$ tel que $K \subseteq D(0, r)$.*

Preuve. Dans le premier cas, la fonction continue $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ atteint sa borne inférieure sur K. Dans le deuxième cas, on considère $f(z) = |z|$. □

Exemple 1 *Soit X un espace vectoriel normé, et soit $E \subseteq X$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout point $a \in X$, il existe un point $x \in E$ tel que $||x - a|| = d(a, E)$.*

Preuve. On applique 3.3.5 à la fonction $f : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = ||x - a||$. $\square$

Exemple 2 *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si K est un compact contenu dans O, alors on peut trouver un ouvert W tel que $\overline{W}$ est compact et $K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq O$.*

Preuve. Si $O = \mathbb{R}^d$, il suffit de prendre pour W une boule ouverte contenant K. Supposons $O \neq \mathbb{R}^d$. La fonction $x \mapsto d(x, \mathbb{R}^d \backslash O)$ est continue et strictement positive sur K. Par compacité, on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ tel que $d(x, \mathbb{R}^d \backslash O) \geq \varepsilon$ pour tout $x \in K$. Posons alors $W = \{x \in \mathbb{R}^d;\ d(x, K) < \varepsilon/2\}$. L'ensemble W est ouvert par continuité de l'application distance, et on a $K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq O$. Enfin, $\overline{W}$ est fermé dans $\mathbb{R}^d$, et il est également borné car K est borné ; par conséquent, $\overline{W}$ est compact. $\square$

Autre preuve. Voici la preuve "habituelle", qui utilise la propriété de Borel-Lebesgue (voir la section 3.5). Pour tout point $x \in K$, on peut trouver un voisinage ouvert V_x de x tel que $\overline{V}_x$ est compact et contenu dans Ω : il suffit de poser $V_x = B(x, r_x)$, où r_x est choisi suffisamment petit. La famille d'ouverts $(V_x)_{x \in K}$ recouvre le compact K, donc on peut trouver $x_1, \dots, x_p$ tels que $K \subseteq V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_p}$, et $W := V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_p}$ convient. $\square$

Exemple 3 *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.*

Preuve. Il suffit en fait de montrer que toute matrice symétrique réelle possède au moins une valeur propre réelle : on conclut ensuite par une récurrence classique.
Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Notons $||\ .\ ||$ la norme euclidienne, $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$, et posons

$$\lambda = \sup \{\langle Ax, x\rangle;\ ||x|| = 1\}\,.$$

La fonction f définie par $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, car $f(x)$ est fonction polynomiale des coordonnées de x. De plus, la sphère unité $S = \{x;\ ||x|| = 1\}$ est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^d$; elle est donc compacte. Il existe donc un point $x_0 \in S$ tel que $\langle Ax_0, x_0\rangle = \lambda$. Si maintenant on note B la forme bilinéaire symétrique définie par $B(x, y) = \langle \lambda x - Ax, y\rangle$ et Φ la forme quadratique associée, alors Φ est positive par définition de λ, et $\Phi(x_0) = 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|B(x_0, y)|^2 \leq B(x_0, x_0)\, B(y, y) = 0\,,$$

et donc $B(x_0, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$. Autrement dit, on a

$$\langle \lambda x_0 - Ax_0, y\rangle = 0$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^d$. On en déduit $Ax_0 = \lambda x_0$, donc λ est valeur propre de A puisque $x_0 \neq 0$. $\square$

3.3.3 Continuité uniforme

On dit qu'une application $f : E \to F$ entre deux espaces métriques est **uniformément continue** si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x, y \in K \quad d_E(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon\,.$$

Autrement dit, f est uniformément continue si elle est continue et si, pour $\varepsilon > 0$ donné, le "δ de continuité" en un point $x \in E$ ne dépend pas du point considéré, mais seulement de ε.

L'uniforme continuité est en général une propriété strictement plus forte que la continuité : par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas uniformément continue.

Théorème 3.3.6 ("théorème de Heine)
Soient K et F deux espaces métriques. Si K est compact, alors toute application continue $f : K \to F$ est uniformément continue.

Preuve. Supposons K compact. Fixons $\varepsilon > 0$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$F_n = \left\{ x \in K;\ \exists y \in K \quad d(x,y) \leq \frac{1}{n} \text{ et } d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \right\} .$$

Comme f est continue, l'ensemble $C_n = \{(x,y) \in K \times K;\ d(x,y) \leq \frac{1}{n} \text{ et } d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\}$ est un fermé de $K \times K$. Comme K est compact, on en déduit que chaque F_n est un fermé de K : cela découle de 3.3.3, ou directement de 3.3.1 en observant que F_n est l'image du *compact* C_n par la première projection $\pi_1 : K \times K \to K$; l'ensemble C_n est compact car fermé dans $K \times K$, qui est compact (voir 3.4). De plus, la suite (F_n) est décroissante, et on a $\bigcap_n F_n = \emptyset$ car f est continue. Par conséquent, l'un des F_n est déjà vide, ce qui signifie exactement que la définition de l'uniforme continuité est satisfaite avec $\delta = \frac{1}{n}$. □

Autre preuve. Supposons K compact, et fixons $f : K \to F$ continue. Par l'absurde, supposons que f ne soit pas uniformément continue. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(x_n), (y_n) \subseteq K$ tels que $d(x_n, y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, mais $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme K est compact, on peut supposer que la suite (x_n) converge vers un point $a \in K$. Alors (y_n) converge également vers a puisque $d(x_n, y_n)$ tend vers 0. Comme f est continue en a, les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ doivent converger toutes les deux vers $f(a)$, et donc $d(f(x_n), f(y_n))$ doit tendre vers 0, ce qui contredit l'hypothèse faite. □

Troisième preuve. On utilise le lemme de Lebesgue 3.5.2. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, tout point $z \in K$ possède un voisinage ouvert V_z tel que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous $x, y \in V_z$. Alors la famille $(V_z)_{z \in K}$ est un recouvrement ouvert de l'espace métrique compact K. D'après le lemme de Lebesgue, on peut trouver $\delta > 0$ tel que tout ensemble $A \subseteq K$ de diamètre inférieur ou égal à δ est contenu dans l'un des V_z. Il est clair que δ convient. □

Quatrième preuve. On utilise le lemme suivant, qui a un intérêt propre.

Lemme 3.3.7 *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques. Si $f : E \to F$ est une application continue, alors il existe une fonction continue $\delta : E \times]0; \infty[\to]0; \infty[$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\delta(x, \varepsilon)$ est un "δ de continuité" pour f au point x, associé à ε.*

Admettant provisoirement le lemme, soit $f : K \to F$ continue, où K est un espace métrique compact, et soit $\delta : K \times]0; \infty[\to]0; \infty[$ donnée par le lemme. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, la fonction

$x \mapsto \delta(x, \varepsilon)$ est continue sur le compact K, donc elle atteint sa borne inférieure, qui est par suite *strictement* positive. Ainsi, $\delta(x, \varepsilon)$ est minorée par une constante $\delta(\varepsilon) > 0$, ce qui prouve que f est uniformément continue. $\square$

Preuve du lemme. Soit $f : E \to F$ continue. Alors l'ensemble

$$C = \{(x, y, \varepsilon) \in E \times E\times]0; \infty[;\ d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\}$$

est un fermé de $E \times E\times]0; \infty[$, et on a $(x, x, \varepsilon) \notin C$ pour tout couple $(x, \varepsilon) \in E\times]0; \infty[$. Si on munit $E \times E\times]0; \infty[$ de la distance ρ définie par

$$\rho((x, y, \varepsilon), (x', y', \varepsilon')) = \max(d(x, x'), d(y, y'), d(\varepsilon, \varepsilon'))\,,$$

qui est bien une distance produit, alors

$$\delta(x, \varepsilon) := \mathrm{dist}((x, x, \varepsilon), C)$$

est donc strictement positif pour tout $(x, \varepsilon) \in E\times]0; \infty[$. La fonction $\delta : E\times]0; \infty[\to]0; \infty[$ ainsi définie est continue, et elle convient par définition. En effet, si $y \in E$, alors $d(x, y) = \rho((x, x, \varepsilon), (x, y, \varepsilon))$. Par conséquent, si $d(x, y) < \delta(x, \varepsilon)$, alors $\rho((x, x, \varepsilon), (x, y, \varepsilon)) < \mathrm{dist}((x, x, \varepsilon), C)$ et donc $(x, y, \varepsilon) \notin C$, autrement dit $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. $\square$

Voici un exemple d'utilisation du théorème 3.3.6.

Corollaire 3.3.8 *Si K est un espace métrique compact et si F est un espace vectoriel normé, alors toute fonction continue $f : K \to F$ est limite uniforme de fonctions boréliennes étagées. Si K est un intervalle compact $[a\,; b] \subset \mathbb{R}$, alors toute fonction continue $f : [a\,; b] \to F$ est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Preuve. Soit $f : K \to X$ continue, et fixons $\varepsilon > 0$. Comme K est compact, l'application f est uniformément continue. On peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $||f(s) - f(t)|| \leq \varepsilon$ dès que $d(x, y) \leq \delta$. Par précompacité (voir la section 3.6), on peut recouvrir K par des boules $B_1, \ldots, B_N$ de diamètre inférieur à δ. Si on pose $A_1 = B_1$ et $A_{i+1} = B_{i+1} \setminus \left(\bigcup_{j \leq i} B_j\right)$, alors les A_i forment une partition de K en boréliens de diamètre inférieur à δ. Dans le cas où K est un intervalle $[a\,; b]$, on peut directement définir une partition de K en *intervalles* A_i de diamètre inférieur à δ : il suffit de choisir N assez grand et de poser $A_i = \left[a + (i-1)\,\frac{b-a}{N}; a + i\,\frac{b-a}{N}\right]$. En choisissant un point $a_i \in f(A_i)$ pour chaque A_i non vide, la fonction $\varphi = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$ est borélienne étagée (en escalier si $K = [a\,; b]$ et les A_i sont des intervalles), et on a $||\varphi - f||_\infty \leq \varepsilon$ par définition de δ. $\square$

3.4 Produits de compacts

3.4.1 Produits finis

Proposition 3.4.1 *Si $E_1, \ldots, E_k$ sont des espaces métriques compacts, alors l'espace produit $E = E_1 \times \ldots \times E_k$ est compact.*

Preuve. Par récurrence, il suffit de traiter le cas $k = 2$. Soit (x_n) une suite de points de $E = E_1 \times E_2$; on écrit $x_n = (x_n(1), x_n(2))$. Comme E_1 est compact, la suite $(x_n(1))$ possède une sous-suite convergente : on peut donc trouver une sous-suite (x'_n) de (x_n) telle que la suite $(x'_n(1))$ converge dans E_1. De même, comme E_2 est compact, on peut trouver une sous-suite (x''_n) de (x'_n) telle que la suite $(x''_n(2))$ converge dans E_1 ; alors la suite $(x''_n(1))$ converge dans E_1 car elle est extraite de $(x'_n(1))$. Ainsi, la suite (x''_n) converge "coordonnée par coordonnée", autrement dit converge dans l'espace produit E. □

Voici une application de ce résultat .

Proposition 3.4.2 *Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors l'enveloppe convexe de K est encore un compact.*

Preuve. Rappelons que l'**enveloppe convexe** de K, notée $\mathrm{conv}(K)$ est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^d$ contenant K ; de manière équivalente, $\mathrm{conv}(K)$ est l'ensemble de tous les points $x \in \mathbb{R}^d$ qui s'écrivent sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \,,$$

où les points x_i appartiennent à K, les λ_i sont positifs et $\sum_1^m \lambda_i = 1$. Par exemple, l'enveloppe convexe de 3 points A, B, C dans $\mathbb{R}^2$ est le triangle ABC. A priori, on autorise des "combinaisons convexes" où l'entier m peut être arbitrairement grand. Cependant, d'après le **théorème de Carathéodory**, il suffit dans $\mathbb{R}^d$ de se restreindre à des combinaisons convexes de seulement $d+1$ points : un point x est dans l'enveloppe convexe de K si et seulement si il est combinaison convexe de $d+1$ points de K (ces points pouvant bien sûr dépendre de x).
Posons alors

$$\Lambda = \left\{ \overline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in [0;1]^d ;\ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\} ,$$

et définissons $\Phi : \Lambda \times K^{d+1}$ par

$$\Phi(\overline{\lambda}, \overline{x}) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i \,.$$

L'application Φ est continue, et on a $\Phi(\Lambda \times K^{d+1}) = \mathrm{conv}(K)$ d'après le théorème de Carathéodory. Comme Λ est compact (car fermé borné dans $\mathbb{R}^{d+1}$) et K également, l'espace métrique $\Lambda \times K^{d+1}$ est compact, donc $\mathrm{conv}(K) = \Phi(\Lambda \times K^{d+1})$ est compact. □

3.4.2 Produits dénombrables ; procédé diagonal

Le résultat suivant est un cas particulier du **Théorème de Tikhonov**. Il est d'une grande utilité, et le principe de "diagonalisation" qui est à la base de la démonstration est également très important.

Théorème 3.4.3 (Tikhonov)
Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts, et soit $K = \prod_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Si (x_n) est une suite de points de K, alors (x_n) possède une sous-suite qui converge "coordonnée par coordonnée".

Preuve. On écrit chaque point $x \in K$ sous la forme $x = (x(0), x(1), \ldots)$. Soit (x_n) une suite de points de K. Comme K_0 est compact, la suite $(x_n(0))$ possède une sous-suite convergente : on peut donc trouver un ensemble infini $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_n(0))_{n\in\mathbf{N}_0}$ converge dans K_0 vers un certain point $x(0)$. De même, la suite $(x_n(1))_{n\in\mathbf{N}_0}$ possède une sous-suite convergente puisque K_1 est compact, donc on peut trouver un ensemble infini $\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_0$ tel que la suite $(x_n(1))_{n\in\mathbf{N}_1}$ converge dans K_1 ; alors la suite $(x_n(0))_{n\in\mathbf{N}_1}$ est également convergente, car elle est extraite de $(x_n(0))_{n\in\mathbf{N}_0}$. Par récurrence, on voit qu'on peut construire une suite décroissante $(\mathbf{N}_k)$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que la propriété suivante ait lieu : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \leq k$, la suite $(x_n(i))_{n\in\mathbf{N}_k}$ converge dans K_i vers un certain point $x(i)$. Choisissons $n_0 \in \mathbf{N}_0$ et définissons une suite (n_k) par la récurrence

$$n_{k+1} = \min\left\{n \in \mathbf{N}_{k+1};\ n > n_k\right\},$$

ce qui est possible car les ensembles $\mathbf{N}_i$ sont infinis. Alors (n_k) est strictement croissante et $n_k \in \mathbf{N}_k$ pour tout k. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé, on a $n_k \in \mathbf{N}_i$ pour tout $k \geq i$ car $\mathbf{N}_k \subseteq \mathbf{N}_i$, donc la suite $(x_{n_k}(i))_{k\in\mathbb{N}}$ est "extraite de $(x_n(i))_{n\in\mathbf{N}_i}$ à partir d'un certain rang". Par conséquent, $(x_{n_k}(i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; autrement dit, la suite (x_{n_k}) converge "coordonnée par coordonnée" vers $x := (x(0), x(1), \ldots) \in K$. □

On utilisera plusieurs fois la conséquence suivante du théorème de Tikhonov. Introduisons d'abord une définition : soit (f_n) est une suite de fonctions définies sur un ensemble T, à valeurs dans $\mathbb{K}$; on dit que la suite (f_n) est **simplement bornée** si pour tout $t \in T$, la suite $(f_n(t))$ est bornée dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 3.4.4 *Soit T un ensemble, et soit (f_n) une suite de fonctions sur T, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite (f_n) est simplement bornée. Si D est une partie dénombrable de T, alors (f_n) possède une sous-suite (f_{n_k}) telle que $(f_{n_k}(t))$ converge dans $\mathbb{K}$ pour tout $t \in D$.*

Preuve. Écrivons $D = \{t_i;\ i \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une constante M_i telle que $|f_n(t_i)| \leq M_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons alors $K_i = \{z \in \mathbb{K};\ |z| \leq M_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, et $x_n = (f_n(t_0), f_n(t_1), \ldots) \in \prod_i K_i$. Les K_i sont compacts, et en appliquant le théorème de Tikhonov à (x_n), on obtient directement le résultat souhaité. □

Remarques

(1) Si $(E_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espaces métriques, il est possible de munir l'espace produit $E = \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$ d'une distance pour laquelle les suites convergentes sont exactement les suites qui convergent "coordonnée par coordonnée". Par exemple, on peut poser

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(1, d_i(x(i), y(i)))\,.$$

La topologie produit de E est alors bien définie, et le théorème de Tikhonov s'énonce très simplement : *si (K_i) est une suite d'espaces métriques compacts, alors $K = \prod_i K_i$ est compact.*

(2) Il est également possible de définir une topologie produit raisonnable sur un produit arbitraire d'espaces topologiques $E = \prod_{i\in I} E_i$, et on verra à la section suivante que la notion de compacité a également un sens dans un espace topologique général. Dans ce cadre élargi, le théorème de Tikhonov est vrai en toute généralité : *tout produit de compacts est compact.*

(3) Le corollaire 3.4.4 vaut plus généralement pour des fonctions $f_n : T \to F$ à valeurs dans un espace vectoriel normé F *de dimension finie.*

3.5 Propriété de Borel-Lebesgue

Soit E un espace métrique. On dit qu'une famille $(O_i)_{i\in I}$ de parties de E est un **recouvrement** de E si $\bigcup_{i\in I} O_i = E$. Un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ est dit **ouvert** si tous les O_i sont des ouverts de E. Un **sous-recouvrement** d'un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de la forme $(O_i)_{i\in J}$, où $J \subseteq I$. On dit qu'un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ est **fini** si l'ensemble d'indices I est fini.

Exemples
(1) Si, pour tout $x \in E$, on choisit un voisinage ouvert V_x de x dans E, alors la famille (V_x) est un recouvrement ouvert de E. Cet exemple est tautologique, mais c'est presque toujours de cette façon que l'on "construit" des recouvrements ouverts.
(2) Si D est une partie dense de E, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, la famille $(B(z,\varepsilon))_{z\in D}$ est un recouvrement ouvert de E.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 3.5.1 *Pour un espace métrique E, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *E est compact.*
(2) *Tout recouvrement ouvert de E possède un sous-recouvrement fini.*

La propriété (2) porte le nom de **propriété de Borel-Lebesgue**. Il faut noter que cette propriété est définie uniquement en termes de la topologie de E. Cela permet de donner un sens à la notion de compacité dans un espace topologique non nécessairement métrique. Il est très instructif de s'astreindre à demontrer certains résultats des sections précédentes (compacts et fermés, image continue d'un compact, produit de deux compacts) en utilisant uniquement la propriété de Borel-Lebesgue.

Preuve de l'implication "(2) *entraîne* (1)". Supposons la propriété (2) vérifiée. D'après 3.2.5, pour montrer que E est compact, il suffit de montrer que si (F_n) est une suite décroissante de fermés de E telle que $\bigcap_n F_n = \emptyset$, alors l'un des F_n est vide ; fixons une telle suite (F_n). Posons $O_n = E \setminus F_n$. Comme $\bigcap_n F_n = \emptyset$, on a $\bigcup_n O_n = E$; par conséquent, la famille $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de E. D'après (2), on peut trouver un ensemble fini $J \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{n\in J} O_n = E$. Comme de plus la suite (O_n) est croissante, on a alors $O_N = E$, où N est le plus grand élément de J. Ainsi, $F_N = \emptyset$, ce qui termine la démonstration. $\square$.

Pour la preuve de la deuxième implication, on a besoin de deux lemmes.

Lemme 3.5.2 (lemme de Lebesgue)
On suppose E compact. Si $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E, alors il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que la propriété suivante ait lieu : tout ensemble $A \subseteq E$ de diamètre inférieur à ε est contenu dans l'un des O_i.

Preuve. On raisonne par l'absurde. Si un tel ε n'existe pas, alors on peut, pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver un ensemble $A_n \subseteq E$ de diamètre inférieur à 2^{-n} et qui ne soit contenu dans aucun O_i. Choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ un point $x_n \in A_n$. Comme E est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x \in E$. Comme les O_i recouvrent E, on peut trouver $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est ouvert, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq O_{i_0}$. Pour k assez grand, on a $x_{n_k} \in B(x, \varepsilon/2)$ et $\mathrm{diam}(A_{n_k}) < \varepsilon/2$, d'où $A_{n_k} \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq O_{i_0}$: cela contredit le choix de A_{n_k}. □

Lemme 3.5.3 *Si (E, d) est compact, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.*

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. On raisonne par contraposée en supposant que la conclusion n'est pas vraie. Soit $x_0 \in E$: la boule $B(x_0, \varepsilon)$ ne recouvre pas E, donc on peut trouver un point $x_1 \in E \setminus B(x_0, \varepsilon)$, autrement dit un point $x_1 \in E$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \varepsilon$. Par hypothèse, $B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)$ ne recouvre pas E, donc on peut trouver un point $x_2 \in E \setminus (B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon))$, autrement dit vérifiant $d(x_2, x_i) \geq \varepsilon$ pour tout $i < 2$. Par récurrence, on voit qu'on peut construire une suite $(x_n) \subseteq E$ telle que $d(x_n, x_i) \geq \varepsilon$ si $i < n$. On a ainsi $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon$ dès que $p \neq q$, ce qui montre que la suite (x_n) ne possède aucune sous-suite convergente. Par conséquent, E n'est pas compact. □

Preuve de l'implication "(1) *entraîne* (2)". Supposons E compact, et soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. D'après le lemme 3.5.2, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble de diamètre inférieur à 3ε est contenu dans l'un des O_i, et d'après le lemme 3.5.3, on peut trouver des boules ouvertes $B_1, \dots, B_m$ de rayon ε telles que $E = \bigcup_1^m B_k$. Pour tout $k \in \{1; \dots; m\}$, la boule B_k est de diamètre inférieur à 3ε, donc on peut choisir un indice $i_k \in I$ tel que $B_k \subseteq O_{i_k}$. Si on pose $J = \{i_1; \dots; i_m\}$, alors J est fini et $\bigcup_{i \in J} O_i = E$. Cela termine la démonstration. □

Corollaire 3.5.4 *Soit E un espace métrique. Un ensemble $A \subseteq E$ est compact si et seulement la propriété suivante a lieu : pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts* de E *telle que $A \subseteq \bigcup_i O_i$, on peut trouver un ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$.*

Preuve. Cela vient du fait que les ouverts de A sont exactement les ensembles du type $O \cap A$, où O est un ouvert de E. □

3.5.1 Idéaux maximaux de $\mathcal{C}(K)$

Comme illustration de la propriété de Borel-Lebesgue, on va déterminer les idéaux maximaux de l'anneau commutatif $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, où K est un espace métrique compact.

Rappelons qu'un **idéal** d'un anneau commutatif $(A, +, .)$ est une partie I de A vérifiant les propriétés suivantes :

- I est un sous-groupe additif ;
- pour tout $a \in A$, on a $aI \subseteq I$.

On dit qu'un idéal $I \subseteq A$ est **maximal** si $I \neq A$ et si I n'est strictement contenu dans aucun idéal $J \neq A$.

Soit K un espace métrique compact. Pour tout point $a \in K$, l'ensemble

$$I_a = \{f \in \mathcal{C}(K);\ f(a) = 0\}$$

est visiblement un idéal de l'anneau $\mathcal{C}(K)$, et $I_a \neq \mathcal{C}(K)$. De plus I_a est également maximal. En effet, si J est un idéal de $\mathcal{C}(K)$ contenant strictement I_a, alors il existe une fonction $g \in J$ telle que $g(a) \neq 0$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$, la fonction $u = f - \frac{f(a)}{g(a)}\, g$ appartient à I_a, donc à J, et par conséquent $f = u + \frac{f(a)}{g(a)}\, g \in J$: ainsi, on a $J = \mathcal{C}(K)$.

Proposition 3.5.5 *Tout idéal maximal de $\mathcal{C}(K)$ est de la forme I_a, pour un certain point $a \in K$.*

Preuve. Il suffit de montrer que tout idéal $I \neq \mathcal{C}(K)$ est contenu dans un certain I_a, autrement dit que si I est un idéal de $\mathcal{C}(K)$ et $I \neq \mathcal{C}(K)$, alors il existe un point $a \in K$ tel que toutes les fonctions de I s'annulent en a.
Soit I un idéal de $\mathcal{C}(K)$. On raisonne par contraposée en supposant que pour tout point $x \in X$, il existe une fonction $f_x \in I$ telle que $f_x(x) \neq 0$: on doit alors montrer que $I = \mathcal{C}(K)$. Pour tout $x \in K$, la continuité de f_x permet de trouver un voisinage ouvert V_x de x tel que f_x ne s'annule pas sur V_x. La famille $(V_x)_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert du compact K, donc on peut trouver $x_1, \dots, x_m$ tels que $K = \bigcup_1^m V_{x_i}$. Posons $V_i = V_{x_i}$ et $f_i = f_{x_i}$. Alors la fonction

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i^2$$

appartient à I. De plus, f ne s'annule pas sur K : si $x \in K$, alors x est dans un certain V_i, et on a donc $f(x) \geq f_i(x)^2 > 0$ car f_i ne s'annule pas sur V_i. Ainsi, la fonction f est inversible dans $\mathcal{C}(K)$ et appartient à l'idéal I : cela prouve que $I = \mathcal{C}(K)$. □

3.6 Précompacité

Un espace métrique (E, d) est dit **précompact** si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini d'ensembles de diamètre inférieur à ε. Une partie A de E est dite précompacte pour d si l'espace métrique (A, d) est précompact.

Les remarques suivantes sont très simples mais importantes.

Remarque 3.6.1 *Pour un espace métrique (E, d), les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *(E, d) est précompact ;*
(2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.*

Preuve. Il est clair que (2) entraîne (1) (en prenant $\varepsilon/3$...) Pour la réciproque, il suffit de remarquer que si A est un ensemble de diamètre (strictement) inférieur à ε et si on on choisit un point $a \in A$, alors $A \subseteq B(a, \varepsilon)$. □

Un nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, on dit qu'un ensemble $R \subseteq E$ est un **ε-réseau** pour un ensemble $A \subseteq E$ si on a $A \subseteq \bigcup_{x\in R} B(x, \varepsilon)$, autrement dit, si pour tout point $x \in E$, on peut trouver un point $z \in R$ tel que $d(x, z) < \varepsilon$. Par exemple, si $\alpha < \sqrt{2}\,\varepsilon$, alors $\alpha\mathbb{Z}^2$ est un ε-réseau pour $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3.6.2 *Soit (E, d) un espace métrique. Pour une partie A de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est précompacte pour d ;*
(2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, A possède un ε-réseau fini ;*
(3) *Pour tout $\varepsilon > 0$, A possède un ε-réseau fini* formé de points de A.

La preuve est laissée en exercice.

Remarque 3.6.3 *Une partie A d'un espace métrique (E, d) est précompacte si et seulement si $\overline{A}$ est précompacte.*

Preuve. Il est clair que si $\overline{A}$ est précompacte, alors A également puisque $A \subseteq \overline{A}$. Pour la réciproque, il suffit d'observer que si $A \subseteq \bigcup_1^m C_i$, alors $\overline{A} \subseteq \bigcup_1^m \overline{C}_i$, et qu'on a $\mathrm{diam}(\overline{C}_i) = \mathrm{diam}(C_i)$. □

Proposition 3.6.4 *Tout espace métrique compact est précompact.*

Preuve. Si (E, d) est un espace métrique compact et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors la famille $(B(x, \varepsilon))_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de E. Le résultat découle donc de la propriété de Borel-Lebesgue. □

Corollaire 3.6.5 *Toute partie relativement compacte d'un espace métrique est précompacte.*

Proposition 3.6.6 *Tout espace métrique précompact est séparable.*

Preuve. Supposons (E, d) précompact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 2^{-n}, autrement dit on peut écrire $E = \bigcup_{a \in D_n} B(a, 2^{-n})$, où $D_n \subseteq E$ est un ensemble fini. Alors $D = \bigcup_n D_n$ est dénombrable, et on vérifie sans difficulté que D est dense dans E. □

Corollaire 3.6.7 *Tout espace métrique compact est séparable.*

Remarque. A titre d'exercice, on pourra montrer qu'un espace métrique (E, d) est séparable si et seulement si il vérifie la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par une famille *dénombrable* de boules ouvertes de rayon ε.

Le résultat suivant est fondamental et montre l'importance de la notion de précompacité.

Théorème 3.6.8 *Pour un espace métrique (E, d), les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *E est compact ;*
(2) *(E, d) est précompact et complet.*

On a déjà montré qu'un espace métrique compact est précompact et complet. Pour la réciproque, il suffit manifestement de démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.6.9 *Un espace métrique est précompact si et seulement si toute suite $(x_n) \subseteq E$ possède une sous-suite de Cauchy.*

Preuve. Supposons E précompact, et fixons une suite $(x_n) \subseteq E$. Par précompacité, on peut recouvrir E par un nombre fini d'ensembles de diamètre inférieur à 2^{-0}. L'un au moins de ces ensembles, noté E_0, contient une infinité de termes de la suite (x_n) ; on dispose donc d'un ensemble infini $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbb{N}$ tel que $x_n \in E_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}_0$. Par récurrence, on construit une suite décroissante (E_k) de parties de E et une suite décroissante $(\mathbf{N}_k)$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes : E_k est de diamètre inférieur à 2^{-k}, et $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbf{N}_k$. Par "diagonalisation", on peut donc construire une suite d'entiers strictement croissante (n_k) telle que $x_{n_i} \in E_k$ si $i \geq k$. Pour $p < q$, on a alors $x_{n_p}, x_{n_q} \in E_p$ car $E_q \subseteq E_p$, et donc $d(x_{n_p}, x_{n_q}) \leq \mathrm{diam}(E_p) = 2^{-p}$. Cela montre que la suite (x_{n_k}) est de Cauchy.
Pour la réciproque, dont on n'a pas besoin pour démontrer "(2) entraîne (1)", il suffit d'examiner la preuve du lemme 3.5.3. □

Corollaire 3.6.10 *Si (E, d) est un espace métrique complet, alors les parties précompactes de (E, d) sont exactement les parties relativement compactes de E.*

Preuve. Si $A \subseteq E$ est précompacte pour d, alors $\overline{A}$ est précompacte, et complète pour d car fermée dans E ; par conséquent, A est relativement compacte dans E. La réciproque a déjà été démontrée.

3.6.1 Enveloppe convexe d'un compact

Rappelons que si X est un espace vectoriel normé, alors l'**enveloppe convexe fermée** d'un ensemble $A \subseteq E$, notée $\overline{\mathrm{conv}}(A)$, est le plus petit convexe fermé de X contenant A. On voit facilement que l'enveloppe convexe fermée de A est l'adhérence de l'enveloppe convexe de A :

$$\overline{\mathrm{conv}}(A) = \overline{\mathrm{conv}(A)}\,.$$

En général, l'enveloppe convexe d'un compact $K \subseteq X$ n'a aucune raison d'être compacte si X est de dimension infinie. On a cependant le résultat suivant.

Proposition 3.6.11 *Soit X un espace de Banach. Si K est un compact de X, alors $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ est encore un compact.*

Preuve. On veut montrer que $\mathrm{conv}(K)$ est relativement compact dans X. Comme X est un espace de Banach, il suffit de montrer que $\mathrm{conv}(K)$ est précompact. Fixons $\varepsilon > 0$.
Comme K est compact, il est précompact. Soit R un ε-réseau fini pour K. Comme R est fini, l'ensemble $C = \mathrm{conv}(R)$ est un compact de X : en effet, si on note d le nombre d'éléments de R et si on pose $\Lambda = \{\overline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in [0;1]^d;\ \sum_1^d \lambda_i = 1\}$, alors C est l'image du compact $\Lambda \times R^d$ par l'application continue Φ définie par $\Phi(\overline{\lambda}, \overline{x}) = \sum_1^d \lambda_i x_i$. Soit S un ε-réseau fini pour C. On va montrer que S est un 2ε-réseau pour $\mathrm{conv}(K)$, ce qui achèvera la démonstration.
Soit $x \in \mathrm{conv}(K)$. Par définition de l'enveloppe convexe, on peut écrire x comme combinaison convexe de points de K :

$$x = \sum_1^m \lambda_i x_i\,,$$

où les λ_i sont positifs, $\sum_i \lambda_i = 1$, et les points x_i appartiennent à K. Pour tout $i \in \{1; \dots; m\}$, on peut trouver un point $u_i \in R$ tel que $||u_i - x_i|| < \varepsilon$, puisque R est un ε-réseau pour K. Alors le point $\tilde{x} = \sum_i \lambda_i u_i$ appartient à C, et on a $||\tilde{x} - x|| \leq \sum_i \lambda_i ||u_i - x_i|| < \varepsilon$. Comme S est un ε-réseau pour C, on peut trouver un point $v \in S$ tel que $||v - \tilde{x}|| < \varepsilon$. On a alors $||v - x|| < 2\varepsilon$. □

3.6.2 Régularité des mesures

Rappelons le résultat suivant de théorie de la mesure.

Proposition 3.6.12 *Soit (E, d) un espace métrique, et soit μ une mesure borélienne positive finie sur E. Pour tout borélien $A \subseteq E$, on a*

$$\mu(A) = \inf \{\mu(O);\ O \text{ ouvert},\ O \supset A\} = \sup\{\mu(F);\ F \text{ fermé},\ F \subseteq A\}$$

La preuve consiste à montrer que l'ensemble des boréliens A vérifiant les deux propriétés précédentes est une tribu, et que tout ouvert de E vérifie ces deux propriétés. La preuve du premier point n'est pas très difficile, et pour le deuxième point, il suffit d'observer que tout ouvert $O \subseteq E$ est réunion dénombrable de fermés : si O est ouvert, alors

$$O = \{x \in E;\ d(x, E \setminus O) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x;\ d(x, E \setminus O) \geq 2^{-n}\}\,.$$

Comme application de la notion de précompacité, on va démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.6.13 *Soient (E, d) un espace métrique complet séparable, et μ une mesure borélienne positive finie sur E. Pour tout borélien $A \subseteq E$, on a*

$$\mu(A) = \sup \{\mu(K);\ K \textit{ compact},\ K \subseteq A\}\,.$$

Preuve. Traitons d'abord le cas $A = E$. Fixons $\varepsilon > 0$: on cherche un compact $K \subseteq E$ tel que $\mu(K) > \mu(E) - \varepsilon$. Posons $F_0 = E$. Comme E est séparable, on peut trouver une famille dénombrable $(x_i)_{i \in I}$ telle que $E = \bigcup_{i \in I} B(x_i, 2^{-1})$. Comme μ est une mesure et $\mu(E) < \infty$, on peut trouver un ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $\mu(\bigcup_{i \in J} B(x_i, 2^{-1}\varepsilon)) > \mu(E) - 2^{-1}\varepsilon$. Posons $F_1 = \bigcup_{i \in J} \overline{B}(x_i, 2^{-1}\varepsilon)$. Alors F_1 est fermé en tant que réunion de fermés, on a $\mu(F_1) > \mu(E) - 2^{-1}\varepsilon$, et on peut recouvrir F_1 par un nombre fini de boules de rayon 2^{-1}. On réapplique le raisonnement précédent à F_1, qui est séparable, et ainsi de suite. On construit ainsi une suite décroissante (F_n) de fermés de E vérifiant les propriétés suivantes : $\mu(F_{n+1}) > \mu(F_n) - 2^{-n-1}$, et F_n est recouvrable par un nombre fini de boules de rayon 2^{-n}. Posons alors $K = \bigcap_n F_n$. L'ensemble K est un fermé de E car intersection de fermés, et on a tout fait pour qu'il soit précompact. Comme E est supposé complet, K est donc un compact de E. De plus, on a $\mu(F_n) > \mu(E) - \sum_1^n 2^{-k}\varepsilon$ pour tout $n \geq 1$, et donc $\mu(K) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n) \geq \mu(E) - \varepsilon$. La démonstration est donc terminée dans le cas où le borélien A est égal à E.
Dans le cas général, on commmence par choisir un fermé $F \subseteq A$ tel que $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$. Alors l'espace métrique (F, d) est complet (car F est fermé dans E) et séparable, donc on peut appliquer ce qui précède : il existe un compact $K \subseteq F$ tel que $\mu(K) > \mu(F) - \varepsilon$. On a ainsi $\mu(K) > \mu(A) - 2\varepsilon$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 3.6.14 *La proposition précédente reste valable si on suppose seulement que la mesure μ est σ-finie.*

La preuve est laissée en exercice. □

3.7 Théorème de Riesz

On a vu au tout début du chapitre que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, tous les ensembles fermés bornés sont compacts. Le résultat suivant montre que cela est *toujours* faux en dimension infinie.

Théorème 3.7.1 (théorème de Riesz)
Soit X un espace vectoriel normé. Si la boule unité de X est compacte, alors X est de dimension finie.

On va donner deux démonstrations de ce théorème. La première repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.7.2 (lemme de Riesz)
Soit X un espace vectoriel normé, et soit E un sous-espace vectoriel fermé de X, avec $E \neq X$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point $x \in X$ tel que $||x|| = 1$ et $d(x, E) > 1 - \varepsilon$.

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. Fixons également $\alpha > 0$ et un point $a \in X \setminus E$. Comme E est fermé dans X, le nombre $d(a, E)$ est strictement positif, et on peut donc trouver un point $u \in E$ tel que $||a - u|| < (1 + \alpha)d(a, E)$. Posons alors $x = \frac{a-u}{||a-u||}$. On a $||x|| = 1$. De plus, comme $u \in E$ et comme E est un espace vectoriel, on a $d(\lambda(a - u), E) = \lambda\, d(a, E)$ pour tout $\lambda > 0$. On en déduit $d(x, E) = \frac{1}{||a-u||} \times d(a, E)$, et donc $d(x, E) > \frac{1}{1+\alpha}$. Par conséquent, le point x convient si α est choisi assez petit. □

Remarque. Si E est de dimension finie, on peut en fait trouver un point $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, E) = 1$. La preuve est la même que plus haut, en remarquant qu'il existe un point $u \in E$ tel que $\|u - a\| = d(a, E)$.

Première preuve du théorème de Riesz. On raisonne par contraposée en supposant X de dimension infinie. Soit $x_0 \in X$ vérifiant $||x_0|| = 1$. Alors $E_0 = \mathrm{Vect}(x_0)$ est un sous-espace vectoriel fermé de X (car il est de dimension finie), et on a $E_0 \neq X$ car X est de dimension infinie. D'après le lemme de Riesz, on peut donc trouver un point $x_1 \in X$ tel que $||x_1|| = 1$ et $d(x_1, E_0) > 1/2$; en particulier, on a $||x_1 - x_0|| > 1/2$. On pose alors $E_1 = \mathrm{Vect}(x_0, x_1)$, et on réapplique ce raisonnement avec E_1 au lieu de E_0, ce qui donne un point $x_2 \in X$ tel que $||x_2|| = 1$ et $||x_2 - x_i|| > 1/2$ pour $i = 0, 1$. Par récurrence, on voit ainsi qu'on peut construire une suite $(x_n) \subseteq X$ telle que $||x_n|| = 1$ pour tout n et $||x_n - x_i|| > 1/2$ si $i < n$. On a alors $||x_p - x_q|| > 1/2$ dès que $p \neq q$. La suite (x_n) est donc une suite de points de la boule unité B_X qui ne possède aucune sous-suite convergente (en fait, aucune sous-suite de Cauchy). Par conséquent, B_X n'est pas compacte. □

Pour la deuxième preuve du théorème de Riesz, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.7.3 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie d sur $\mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, il faut au moins N^d boules de rayon $1/N$ pour recouvrir la boule unité de E.*

Preuve. Soit $B_1, \dots, B_k$ des boules de rayon $1/N$ recouvrant la boule unité B_E : il faut montrer qu'on a $k \geq N^d$. Comme les boules $\overline{B}_i$ recouvrent a fortiori B_E, on peut supposer que les B_i sont des boules fermées.
Notons m "la" mesure de Lebesgue sur E : de façon précise, on fixe une base de E, et on note m

la mesure sur E obtenue à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ en identifiant E à $\mathbb{R}^d$ via cette base. Comme $B_E \subseteq \bigcup_i B_i$, on a

$$m(B_E) \leq \sum_{i=1}^{k} m(B_i)\,.$$

De plus, chaque boule B_i est une translatée de la boule $\frac{1}{N}\,B_E$. On a donc $m(B_i) = m\left(\frac{1}{N}\,B_E\right) = \frac{1}{N^d}\,m(B_E)$ pour tout $i \in \{1;\ldots;k\}$, et par conséquent

$$m(B_E) \leq \frac{k}{N^d}\,m(B_E)\,.$$

Comme $m(B_E) \neq 0$, cela termine la démonstration. □

Deuxième preuve du théorème de Riesz. Supposons que la boule unité de X soit compacte. Alors B_X est précompacte, donc on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $1/2$; on note $x_1, \ldots, x_k$ les centres de ces boules. Si E est un sous-espace vectoriel de X de dimension finie et contenant $x_1, \ldots, x_k$, alors $B_E \subseteq B_X$, donc B_E est recouverte par les ensembles $B_i = B_E \cap B(x_i, 1/2)$, qui sont des boules de E de rayon $1/2$. D'après le lemme précédent, on a donc $2^{\dim(E)} \leq k$, autrement dit $\dim(E) \leq M = \frac{Log k}{Log 2}$. Ceci étant vrai pour tout sous-espace vectoriel de X de dimension finie contenant $x_1, \ldots, x_k$, on en déduit que X lui-même est de dimension finie $d \leq M$. □

Remarque 3.7.4 *On a en fait montré que si la boule unité de X est précompacte, alors X est de dimension finie.*

Chapitre 4

Applications linéaires continues

4.1 Critère de continuité

Pour une application linéaires entre deux espaces vectoriels normés, la continuité se caractérise de manière très simple.

Théorème 4.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Pour une application linéaire $T : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *T est continue.*
(2) *Il existe une constante $C < \infty$ telle que $||T(x)|| \leq C\,||x||$ pour tout $x \in E$.*

Preuve. Supposons T continue, donc en particulier continue en 0. Comme $T(0) = 0$, la définition de la continuité appliquée avec $\varepsilon = 1$ montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que $||T(y)|| \leq 1$ pour $||y|| \leq \delta$. En posant $y = \delta \frac{x}{||x||}$ et en utilisant la linéarité de T, on en déduit que pour tout $x \neq 0$, on a $||T(x)|| \leq \frac{1}{\delta}\,||x||$. Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$, donc (2) est vérifiée avec $C = \frac{1}{\delta}$. Inversement, si (2) est vérifiée, on a $||T(x) - T(y)|| = ||T(x - y)|| \leq C\,||x - y||$ pour tous $x, y \in E$. Cela prouve que T est lipschitzienne, et donc continue. □

Corollaire 4.1.2 *En dimension finie,* toutes *les applications linéaires sont continues. De façon précise, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie et si F est un espace vectoriel normé, alors toute application linéaire $T : E \to F$ est continue.*

Preuve. Par équivalence des normes, on peut se ramener au cas où $E = (\mathbb{K}^d, ||\ .\ ||_\infty)$. Notons $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$. Si $x = \sum_1^d x_i e_i \in E$, alors

$$\begin{aligned} ||T(x)|| &= ||\sum_{i=1}^{d} x_i T(e_i)|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|\,||T(e_i)|| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{d} ||T(e_i)|| \right) \times ||x||_\infty . \end{aligned}$$

Par conséquent, le critère de continuité est satisfait avec $C = \sum_i ||T(e_i)||$. $\square$

De la preuve de 4.1.1, on déduit également le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.3 *Une application linéaire est continue si et seulement si elle est continue en* 0. *Il revient encore au même de dire que* T *est bornée sur la boule* $\overline{B}(0,\delta)$, *pour un certain* $\delta > 0$. *Si tel est le cas, alors* T *est en fait lipschitzienne, et elle est donc bornée sur toute partie bornée de* E.

Dans les cas des *formes linéaires*, on dispose d'un autre critère de continuité, parfois utile.

Proposition 4.1.4 *Soit* E *un espace vectoriel normé. Une forme linéaire* $\Phi : E \to \mathbb{K}$ *est continue si et seulement si son noyau est fermé dans* E.

Preuve. Si Φ est continue, alors $\mathrm{Ker}(\Phi) = \Phi^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E. Inversement, supposons que Φ ne soit pas continue. Alors Φ n'est pas bornée sur la boule unité de E, donc on peut trouver une suite $(x_n) \subseteq E$ telle que $||x_n|| \leq 1$ et $|\Phi(x_n)| > 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En posant $y_n = \frac{x_n}{\Phi(x_n)}$, on a alors $\Phi(y_n) = 1$ et $||y_n|| < 2^{-n}$. Soit $a \in E$ tel que $\Phi(a) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $a - y_n \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Comme y_n tend vers 0, on en déduit que a est adhérent à $\mathrm{Ker}(\Phi)$: cela prouve que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ n'est pas fermé dans E puisque $a \notin \mathrm{Ker}(\Phi)$. $\square$

Corollaire 4.1.5 *Si* Φ *est une forme linéaire non continue sur un espace vectoriel normé* E, *alors* $\mathrm{Ker}(\Phi)$ *est dense dans* E.

Preuve. Si Φ n'est pas continue, alors $\mathrm{Ker}(\Phi)$ n'est pas fermé, donc $\overline{\mathrm{Ker}(\Phi)}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant strictement $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Comme $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un hyperplan (un sous-espace de codimension 1), on a donc $\overline{\mathrm{Ker}(\Phi)} = E$. $\square$

4.1.1 L'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$

Si $(E, ||\,.\,||_E)$ et $(F, ||\,.\,||_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires continues de E dans F. Lorsque $E = F$, on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.

Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, d'après le théorème précédent, on peut poser

$$||T|| = \sup \left\{ \frac{||T(x)||_F}{||x||_E};\ x \in E,\ x \neq 0 \right\} .$$

Par homogénéité des normes, on a également

$$||T|| = \sup \{||T(x)||_F;\ ||x||_E = 1\} = \sup \{||T(x)||_F;\ ||x||_E \leq 1\} .$$

Notons enfin que $||T||$ est en fait la constante de Lipschitz de T : cela découle du fait qu'on a $||T(x - y)|| = ||T(x) - T(y)||$ pour $x, y \in E$.

Avec cette notation, le théorème 4.1.1 se reformule comme suit :

Théorème 4.1.6 *Soit $C \in \mathbb{R}^+$. Pour une application linéaire $T : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) $||T(x)|| \leq C\,||x||$ pour tout $x \in E$;
(2) T est continue et $||T|| \leq C$.

La preuve du résultat suivant est laissée en exercice

Proposition 4.1.7 *L'application $||\ .\ ||$ définie plus haut est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$. On dit que $||\ .\ ||$ est la norme* **subordonnée** *aux deux normes $||\ .\ ||_E$ et $||\ .\ ||_F$*

En général, lorsqu'on veut montrer qu'une application linéaire est continue et calculer sa norme, on procède en deux étapes : on commence par majorer la norme, ce qui se fait souvent assez mécaniquement, puis on essaye de la minorer, ce qui peut être plus délicat.

Le résultat suivant montre que les normes d'opérateurs se comportent bien vis à vis de la composition.

Proposition 4.1.8 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés. Si $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $TS := T \circ S \in \mathcal{L}(E, G)$ et $||TS|| \leq ||T||\,||S||$.*

Preuve. TS est linéaire, et pour $x \in E$, on a $||TS(x)|| \leq ||T||\,||S(x)|| \leq ||T||\,||S||\,||x||$. □

Corollaire 4.1.9 *Si $T \in \mathcal{L}(E, E)$, alors $||T^n|| \leq ||T||^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Corollaire 4.1.10 *L'application $(S, T) \mapsto TS$ est continue sur $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.*

Preuve. Si S_n tend vers S et T_n tend vers T, alors les inégalités

$$\begin{aligned} ||T_nS_n - TS|| &\leq ||T_n(S_n - S)|| + ||(T_n - T)S|| \\ &\leq ||T_n||\,||S_n - S|| + ||S||\,||T_n - T|| \end{aligned}$$

prouvent que T_nS_n tend vers TS, car la suite (T_n) est bornée. □

Théorème 4.1.11 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que l'espace F est complet. Alors l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.*

Preuve. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour $x \in E$ fixé et $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$||T_q(x) - T_p(x)|| \leq ||T_q - T_p||\,||x||\,.$$

Par conséquent, la suite $(T_n(x))$ est de Cauchy dans l'espace de Banach F. Elle est donc convergente dans F, et on peut poser $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. L'application $T : E \to F$ ainsi définie est linéaire car les T_n le sont. De plus, la suite (T_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$ puisqu'elle est de Cauchy. Si on pose $M = \sup_n ||T_n||$, alors $||T_n(x)|| \leq M\,||x||$ pour tout $x \in E$ et pour tout n, d'où $||T(x)|| \leq M\,||x||$ pour tout $x \in E$. Cela prouve que T est continue. Enfin, si $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$||(T_q - T_n)(x)|| \leq ||T_q - T_n||\,||x|| \leq \varepsilon_n\,||x||$$

pour tout $q \geq n$, où on a posé $\varepsilon_n = \sup_{q\geq n} ||T_q - T_n||$. On en déduit $||(T - T_n)(x)|| \leq \varepsilon_n\,||x||$ pour tout $x \in E$, d'où $||T - T_n|| \leq \varepsilon_n$. Comme ε_n tend vers 0 puisque la suite (T_n) est de Cauchy, cela prouve que T_n tend vers T pour la norme de $\mathcal{L}(E, F)$. □

Corollaire 4.1.12 *Si E est un espace vectoriel normé, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace de Banach.*

Voici deux exemples d'application du théorème précédent.

Exemple 1 *Soit X un espace de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X)$ vérifie $||T|| < 1$, alors $Id - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$, et*

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \,,$$

où la série converge en norme dans $\mathcal{L}(X)$.

Preuve. La série $\sum T^k$ est absolument convergente car $||T^k|| \leq ||T||^k$ et $||T|| < 1$; elle est donc convergente dans $\mathcal{L}(X)$, puisque cet espace est complet. Si on pose $S = \sum_0^\infty T^k$ et $S_n = \sum_0^n T^k$ alors on a $S_n(Id - T) = Id - T^{n+1} = (Id - T)S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme T^{n+1} tend vers 0 et comme le produit est continu sur $\mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X)$, on en déduit $S(Id - T) = Id = (Id - T)S$. Cela prouve que $Id - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$, d'inverse S. □

Exemple 2 *Soit X un espace de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X)$, alors on peut définir l'***exponentielle** *de l'opérateur T par la formule*

$$e^T = \sum_0^\infty \frac{T^n}{n!} \,,$$

où la série converge dans $\mathcal{L}(X)$.

Preuve. La série $\sum \frac{T^n}{n!}$ converge absolument car $\sum_0^\infty \frac{||T^n||}{n!} \leq \sum_0^\infty \frac{||T||^n}{n!} = e^{||T||} < \infty$. □

4.2 Exemples

4.2.1 Normes d'opérateurs en dimension finie

On a vu qu'en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues. Par conséquent, l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ s'identifie à l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. A toute norme sur $\mathbb{K}^d$ correspond donc une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. La proposition suivante donne trois exemples où la norme subordonnée est bien identifiée.

Proposition 4.2.1 *Pour $p \in \{1; 2; \infty\}$, notons $|||\ .\ |||_p$ la norme subordonnée à la norme $\|\ .\ \|_p$. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.*

(1) *On a* $|||M|||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq d} \sum\limits_{j=1}^d |m_{ij}|$ *et* $|||M|||_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq d} \sum\limits_{i=1}^d |m_{ij}|$.

(2) *En notant M^* la matrice adjointe de M (i.e. $M^* = (\overline{m_{ji}})$), on a*

$$|||M|||_2 = \mathrm{Max}\,\{\sqrt{\lambda};\ \lambda \text{ valeur propre de } M^*M\}\,.$$

Preuve. (1) Posons $C = \max_i \sum_j |m_{ij}|$. Pour $x \in \mathbb{K}^d$, la i-ème composante de Mx est $(Mx)_i = \sum_j m_{ij} x_j$. On a donc

$$|(Mx)_i| \leq \sum_{j=1}^{d} |m_{ij}|\, |x_j| \leq ||x||_\infty \times \sum_j |m_{ij}|$$

pour tout $i \in \{1; \ldots ; d\}$, d'où $||Mx||_\infty \leq C\, ||x||_\infty$. Par conséquent $|||M|||_\infty \leq C$. Inversement, soit i_0 tel que $C = \sum_j |m_{i_0 j}|$. Notons e le vecteur $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$, où $\varepsilon_j \in \mathbb{K}$ vérifie $|\varepsilon_j| = 1$ et $\varepsilon_j m_{i_0 j} = |m_{i_0 j}|$. Alors $||e||_\infty = 1$ et $(Me)_{i_0} = C$, donc $|||M|||_\infty \geq ||Me||_\infty \geq C$. La preuve est analogue pour $|||\ .\ |||_1$.
(2) La matrice $A = M^* M$ est autoadjointe ($A^* = A$) et positive ($\langle Ax, x\rangle = \|Mx\|_2^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^d$). Par conséquent, A est diagonalisable en base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles positives. Soit $(f_1, \ldots, f_d)$ une base orthonormée de diagonalisation pour A, et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres associées. Posons également $\rho = \mathrm{Max}\,\{\lambda_1; \ldots ; \lambda_d\}$. Pour $x = \sum_1^d x_j f_j$, on a

$$\|Mx\|_2^2 = \langle Ax, x\rangle = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j |x_j|^2$$

d'où, par définition de ρ :

$$\|Mx\|_2^2 \leq \rho \sum_{j=1}^{d} |x_j|^2 = \rho\, \|x\|_2^2 \,.$$

On a donc $|||M|||_2 \leq \sqrt{\rho}$. Pour l'inégalité inverse, on prend $x = f_j$, ce qui donne $|||M|||_2^2 \geq \|Mf_j\|_2^2 = \lambda_j$ pour tout $j \in \{1\,; \ldots ; d\}$ et donc $|||M|||_2 \geq \sqrt{\rho}$. □

4.2.2 Projections orthogonales

Dans cette section, H est un espace de Hilbert réel ou complexe. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur H. Dans le cas complexe, on adopte la convention suivante : $\langle x, y\rangle$ est linéaire par rapport à y et antilinéaire par rapport à x.

Théorème 4.2.2 *Soit E un sous-espace vectoriel fermé de H.*
(1) *Pour tout $x \in H$, il existe un unique vecteur $z \in E$ tel que $||x - z|| = d(x, E)$. Ce vecteur est noté $p_E(x)$.*
(2) *Le vecteur $p_E(x)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes : $p_E(x) \in E$ et $x - p_E(x) \in E^\perp$.*
(3) *L'application $p_E : H \to E$ est une projection linéaire continue, de norme 1. On dit que p_E est la* **projection orthogonale** *de H sur E.*

Preuve. La partie (1) a déjà été démontrée dans le chapitre sur les espaces complets.
Pour démontrer (2), on se place d'abord dans le cas d'un espace de Hilbert *réel*. Fixons $x \in H$ et définissons $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(z) = ||z - x||^2$. Il est bien connu (et facile à montrer) que l'application f est différentiable sur E et que sa différentielle est donnée par

$$Df(z)\,.\,h = 2\,\langle z - x, h\rangle\,.$$

Comme f atteint sa borne inférieure au point $p_E(x)$, on a $Df(p_E(x)) = 0$, donc $p_E(x) - x$ est orthogonal à E. Inversement, si $z \in E$ et si $z - x$ est orthogonal à E, alors $u = z - p_E(x) =$

$(z-x)+(x-p_E(x))$ est orthogonal à E. Comme $u \in E$, on a donc $u=0$, autrement dit $z=p_E(x)$. On a donc démontré (2) dans le cas d'un espace de Hilbert réel. Dans le cas complexe, ce qui précède montre que $p_E(x)$ est caractérisé par le fait qu'on a $\mathrm{Re}\,\langle x-p_E(x),h\rangle = 0$ pour tout $h\in E$. En remplaçant h par ih, on obtient aussi $\mathrm{Im}\,\langle x-p_E(x),h\rangle=0$, d'où finalement $\langle x-p_E(x),h\rangle = 0$ pour tout $h\in E$, ce qui termine la démonstration.
La linéarité de p_E découle directement de (2) : si $x,y\in H$, alors $p_E(x)+p_E(y)$ est un vecteur de E tel que $x+y-(p_E(x)+p_E(y))$ est orthogonal à E, donc $p_E(x)+p_E(y)=p_E(x+y)$; de même pour $p_E(\lambda x)$. De plus, on a $p_E(x)=x$ pour tout $x\in E=\mathrm{Im}(p_E)$, donc p_E est une projection. Si $x\in H$, alors les vecteurs $x-p_E(x)$ et $p_E(x)$ sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore, on a donc

$$||x||^2 = ||x-p_E(x)||^2 + ||p_E(x)||^2\,.$$

En particulier, on a $||p_E(x)|| \leq ||x||$, ce qui prouve que l'application linéaire p_E est continue avec $||p_E||\leq 1$. Mais comme $p_E(x)=x$ si $x\in E$, on a aussi $||p_E||\geq 1$, d'où finalement $||p_E||=1$. □

Corollaire 4.2.3 *Pour tout sous-espace vectoriel $E\subseteq H$, on a $H=\overline{E}\oplus E^\perp$. En particulier, si E est un sous-espace fermé de H, alors $H=E\oplus E^\perp$.*

Preuve. Si E est fermé, on a $H=E\oplus E^\perp$ puisque p_E est une projection d'image E et de noyau $E^\perp$. Dans le cas général, on observe qu'on a $E^\perp=\overline{E}^\perp$ par continuité du produit scalaire, et on applique le premier cas. Les détails sont laissés en exercice. □

Corollaire 4.2.4 *Un sous-espace vectoriel $E\subseteq H$ est dense dans H si et seulement si $E^\perp=\{0\}$.*

4.2.3 Opérateurs à noyau

Dans cette section, (Ω,μ) est un espace mesuré. On suppose que la mesure μ est σ-finie, pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini. On fixe un **noyau** sur Ω, c'est-à-dire une fonction mesurable

$$K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{K}\,.$$

Si $f:\Omega\to\mathbb{K}$ est une fonction mesurable, on pose

$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x,y)\,f(y)\,d\mu(y)$$

pour tout point x tel que la fonction $y\mapsto K(x,y)\,f(y)$ est intégrable sur Ω. On dit alors que *la fonction $T_K f$ est définie au point x.*

Soient $p_1,p_2\in[1\,;\infty]$. On dira que le noyau K *définit un opérateur borné de L^{p_2} dans L^{p_1}* si les propriétés suivantes sont vérifiées :
• pour toute fonction $f\in L^{p_2}(\Omega)$, la fonction $T_K f$ est définie en presque tout point $x\in\Omega$;
• si $f\in L^{p_2}(\Omega)$, alors $T_K f\in L^{p_1}(\Omega)$, et l'application linéaire $f\mapsto T_K f$ est continue de $L^{p_2}(\Omega)$ dans $L^{p_1}(\Omega)$.

Remarque. Plus généralement, on pourrait considérer un noyau $K:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{K}$, où (Ω_1,μ_1) et (Ω_2,μ_2) sont deux espaces mesurés éventuellement différents. Les résultats qui suivent seraient encore valables, avec exactement les mêmes démonstrations.

Le lemme suivant est une application "mécanique" du théorème de Fubini.

Lemme 4.2.5 *Soient* $p_1 \in [1\,;\infty]$ *et* $p_2 \in [1\,;\infty[$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *K définit un opérateur borné de L^{p_2} dans L^{p_1}.*
(2) *Il existe une constante $C < \infty$ telle que, pour toute fonction $f \in L^{p_2}(\Omega)$, on ait*

$$\int_\Omega \Big(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \Big)^{p_1} d\mu(x) \leq C\, ||f||_{p_2}^{p_1}\,.$$

Dans ce cas, on a $||T_K|| \leq C^{1/p_1}$, pour toute constante C vérifiant (2).

Les détails sont laissés en exercice. □

On va donner ici deux moyens efficaces de vérifier qu'un noyau K définit un opérateur borné.

Proposition 4.2.6 *Soit $p \in [1\,;\infty]$, et soit q l'exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). On suppose que le noyau K appartient à $L^p(\Omega \times \Omega)$. Alors K définit un opérateur borné de L^q dans L^p, et $||T_K|| \leq ||K||_p$.*

Preuve. On traite d'abord le cas $1 \leq p < \infty$ grâce au lemme 4.2.5. Soit $f \in L^q(\Omega)$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\Big(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \Big)^p \leq \Big(\int_\Omega |K(x,y)|^p d\mu(y) \Big) \times ||f||_q^p$$

pour tout $x \in \Omega$. En intégrant cette inégalité par rapport à x, on en déduit

$$\int_\Omega \Big(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) \Big)^p d\mu(x) \leq ||K||_p^p \times ||f||_q^p\,,$$

d'où le résultat d'après 4.2.5.
Supposons maintenant $p = \infty$, autrement dit $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$. L'idée de la preuve est extrêmement simple, mais la formulation est rendue un peu délicate par le "presque partout" inhérent à la définition de la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Par définition de $\|K\|_\infty$, on a $|K(x,y)| \leq \|K\|_\infty$ pour presque tout couple $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. En appliquant le théorème de Fubini à la fonction indicatrice de l'ensemble $\{(x,y);\ |K(x,y)| > \|K\|_\infty\}$, on voit que la propriété suivante a lieu : pour presque tout $x \in \Omega$, on a $|K(x,y)| \leq \|K\|_\infty$ presque partout sur Ω. Si maintenant $f \in L^1(\Omega)$, on en déduit que pour presque tout $x \in \Omega$, on a $\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)| \leq \|K\|_\infty$. Par conséquent, $T_K f(x)$ est bien défini presque partout et appartient à L^∞, avec $\|T_K f\|_\infty \leq \|K\|_\infty$. Cela termine la démonstration dans le cas $p = \infty$. Notons que la preuve serait réellement immédiate si on supposait qu'on a $|K(x,y)| \leq \|K\|_\infty$ pour *tout* $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. □

Corollaire 4.2.7 *Si $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, alors K définit un opérateur borné de L^2 dans L^2, avec $||T_K|| \leq ||K||_2$.*

Exemple (opérateur de Volterra)
Pour tout $p \in [1\,;\infty]$, on définit un opérateur linéaire continu de $L^q([0;1])$ dans $L^p([0;1])$ en posant

$$V_p f(x) = \int_0^x f(y)\,dy\,,$$

*et on a $\|V_p\| \le 2^{-1/p}$. Cet opérateur s'appelle l'***opérateur de Volterra***. Il envoie en fait $L^q([0;1])$ dans $\mathcal{C}([0;1])$.*

Preuve. On applique la proposition au noyau $K \in L^p$ défini par $K(x,y) = \mathbf{1}_{[0;x]}(y)$, dont la norme L^p vaut $2^{-1/p}$. Pour montrer que $V_p f$ est toujours une fonction continue, on peut par exemple utiliser le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres : pour $x_0 \in [0;1]$ fixé, la fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{[0;x]}(y)f(y) = \mathbf{1}_{[y;1]}(x)f(y)$ est continue en x_0 pour tout point $y \neq x_0$, donc pour presque tout $y \in [0;1]$, et on peut majorer $|K(x,y)|$ par $|f(y)|$, fonction intégrable sur $[0\,;1]$ car $L^q([0;1]) \subseteq L^1([0;1])$. Dans le cas $q > 1$, on a une preuve plus simple, qui donne une information plus précise : en utilisant l'inégalité de Hölder pour majorer $|V_p f(x') - V_p f(x)| = |\int_x^{x'} f(y)\,dy|$, on trouve $|V_p f(x') - V_p f(x)| \le \|f\|_q\, |x'-x|^{1/p}$; la fonction $V_p f$ est donc $\frac{1}{p}$-*Höldérienne.* □

Théorème 4.2.8 (test de Schur)
Soit $p \in [1\,;\infty]$, et soit q l'exposant conjugué. On suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive $w : \Omega \to \mathbb{R}$ et une constante $C < \infty$ telles que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :
(1) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(y)^{1/p}\, d\mu(y) \le C\, w(x)^{1/p}$ *pour (presque) tout* $x \in \Omega$;
(2) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(x)^{1/q}\, d\mu(x) \le C\, w(y)^{1/q}$ *pour (presque) tout* $y \in \Omega$.
Alors K définit un opérateur borné de L^p dans L^p, avec $||T_K|| \le C$.

Preuve. Soit $f \in L^p(\Omega)$. Pour (presque tout) $x \in \Omega$, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y) &= \int_\Omega |K(x,y)|^{1/q} w(y)^{1/pq} \times |K(x,y)|^{1/p}\, \frac{|f(y)|}{w(y)^{1/pq}}\, d\mu(y) \\
&\le \left(\int_\Omega |K(x,y)| w(y)^{1/p}\, d\mu(y)\right)^{1/q} \times \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^p}{w(y)^{1/q}}\, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&\le C^{1/q}\, w(x)^{1/pq} \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^p}{w(y)^{1/q}}\, d\mu(y)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

En élevant à la puissance p, en intégrant par rapport à x et en utilisant le théorème de Fubini, on en déduit

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\mu(y)\right)^p d\mu(x) &\le C^{p/q} \int_\Omega \frac{|f(y)|^p}{w(y)^{1/q}} \left[\int_\Omega |K(x,y)|\, w(x)^{1/q}\, d\mu(x)\right] d\mu(y) \\
&\le C^{p/q} \int_\Omega \frac{|f(y)|^p}{w(y)^{1/q}} \times C w(y)^{1/q}\, d\mu(y) \\
&= C^{\frac{p}{q}+1}\, ||f||_p^p .
\end{aligned}$$

Par conséquent, K définit un opérateur borné de L^p dans L^p, avec $||T_K|| \le C^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} = C$. □

Corollaire 4.2.9 *On suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive* $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$ *et une constante* $C < \infty$ *telles que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :*
(1) $\int_\Omega |K(x,y)|\,\omega(y)\,d\mu(y) \le C\,\omega(x)$ *pour (presque) tout* $x \in \Omega$ *;*
(2) $\int_\Omega |K(x,y)|\,\omega(x)\,d\mu(x) \le C\,\omega(y)$ *pour (presque) tout* $y \in \Omega$*.*
Alors K *définit un opérateur borné de* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$*, avec* $||T_K|| \le C$*.*

Preuve. On applique le test de Schur avec $p = 2 = q$ et $w(x) = \omega(x)^2$. □

Corollaire 4.2.10 *On suppose qu'il existe une constante* $C < \infty$ *telle que* $\int_\Omega |K(x,y)|\,d\mu(y) \le C$ *pour presque tout* $x \in \Omega$ *et* $\int_\Omega |K(x,y)|\,d\mu(x) \le C$ *pour presque tout* $y \in \Omega$*. Alors, pour tout* $p \in [1\,;\infty]$*, le noyau* K *définit un opérateur borné de* L^p *dans* L^p*, avec* $\|T_K\| \le C$*.*

Preuve. On applique le test de Schur avec $w(x) \equiv 1$. □

Exemple 1 (opérateurs de convolution)
Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$*, et soit* $p \in [1\,;\infty]$*. Pour toute fonction* $f \in L^p(\mathbb{R})$*, la convolée* $\varphi * f$ *est définie presque partout par la formule*

$$\varphi * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(x-y)\,dy\,.$$

De plus, $\varphi * f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $||\varphi * f||_p \le ||\varphi||_1\,||f||_p$*.*

Preuve. On applique le test de Schur sous la forme 4.2.10, avec $K(x,y) = \varphi(x-y)$: on a $\int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\,dy = ||\varphi||_1 = \int_{\mathbb{R}} |K(x,y)|\,dx$ pour $x, y \in \mathbb{R}$, donc le test s'applique avec $C = ||\varphi||_1$. □

Exemple 2 (matrice de Hilbert)
On définit un opérateur borné $T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$ *en posant*

$$T(x)_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j}\,x_j\,.$$

Preuve. On prend ici $\Omega = \mathbb{N}^*$, muni de la mesure de décompte. Le noyau $K : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{K}$ est défini par $K(i,j) = \frac{1}{i+j}$.
Soit $\omega : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ la suite définie par $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$, $i \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ fixé, les majorations

$$\frac{1}{i+j}\,\frac{1}{\sqrt{j}} \le \int_{j-1}^{j} \frac{dt}{(i+t)\sqrt{t}}$$

conduisent à l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{\infty} K(i,j)\,\omega_j \le \int_0^{\infty} \frac{dt}{(i+t)\sqrt{t}}\,.$$

Grâce au changement de variable $u = \sqrt{t}$, on trouve ensuite

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(i+t)\sqrt{t}} = 2\int_0^{\infty} \frac{du}{i+u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{i}}\,.$$

Ainsi, on a obtenu

$$\sum_{j=1}^{\infty} K(i,j)\,\omega_j \leq \pi\,\omega_i$$

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et la même inégalité en intervertissant i et j. Le test de Schur s'applique donc (sous la forme 4.2.9) avec $C = \pi$. $\square$

Remarquons pour finir que tout opérateur sur $\mathbb{K}^d$ peut être considéré comme un opérateur à noyau, en identifiant $\mathbb{K}^d$ à l'ensemble des fonctions $x : \{1; \dots ; d\} \to \mathbb{K}$, et en munissant $\Omega = \{1; \dots ; d\}$ de la mesure de décompte. Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ et si on note (a_{ij}) la matrice de T dans la base canonique, alors T est associé au noyau $K : \Omega \times \Omega$ défini par $K(i,j) = a_{ij}$.

4.3 Prolongement par densité

Le résultat suivant est simple, mais très utile.

Théorème 4.3.1 *Soient X un espace vectoriel normé, Y un espace de Banach, et E un sous-espace vectoriel de X. On suppose que E est dense dans X. Si $T : E \to Y$ est une application linéaire continue, alors T se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\tilde{T} : X \to Y$. De plus, on a $||\tilde{T}|| = ||T||$.*

Preuve. Comme E est dense dans X, il y a nécessairement unicité d'un prolongement continu de T. Soit x un point quelconque de X. Comme E est dense dans X, on peut trouver une suite $(z_n) \subseteq E$ qui converge vers x. Alors la suite (z_n) est de Cauchy, et comme $||T(z_q) - T(z_p)|| \leq ||T||\,||z_q - z_p||$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite $(T(z_n))$ est de Cauchy dans Y. Comme Y est supposé complet, la suite $(T(z_n))$ est donc convergente dans Y. De plus, si (z'_n) est une autre suite de points de E convergeant vers x, alors la suite $z_0, z'_0, z_1, z'_1, \dots$ converge aussi vers x, donc la suite $T(z_0), T(z'_0), T(z_1), T(z'_1), \dots$ est convergente d'après ce qui précéde, et par conséquent les suites $(T(z_n))$ et $(T(z'_n))$ ont la même limite. On peut donc poser $\tilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(z_n)$, où (z_n) est n'importe quelle suite de points de E convergeant vers x. On vérifie sans peine que l'application $\tilde{T}$ est linéaire. Enfin, avec les notations précédentes, on a $||T(z_n)|| \leq ||T||\,||z_n||$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $||\tilde{T}(x)|| \leq ||T||\,||x||$ par passage à la limite. Par conséquent, $\tilde{T}$ est continue et $||\tilde{T}|| \leq ||T||$. Comme $\tilde{T}$ est un prolongement de T, on a aussi $||\tilde{T}|| \geq ||T||$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarque La linéarité ne joue en fait aucun rôle ici ; c'est la *continuité uniforme* qui est la propriété clé. De façon précise, on a le résultat suivant : *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, avec (F, d_F) complet, et soit Z une partie dense de E. Si $f : Z \to F$ est une application uniformément continue, alors f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : E \to F$. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.* La preuve est essentiellement la même que celle donnée dans le cas linéaire.

Exemple 1 *Intégrale vectorielle*

Soit (K, d) un espace métrique compact, et soit X un espace de Banach. Notons $\mathcal{E}(K, X)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions boréliennes étagées $\varphi : K \to X$. Si $\varphi \in \mathcal{E}(K, X)$

alors

$$\varphi = \sum_1^N a_i \mathbf{1}_{A_i} ,$$

où les A_i sont des boréliens de K, non nécessairement disjoints, et les a_i sont des vecteurs de X. Si maintenant μ est une mesure borélienne finie sur X, alors on montre que le vecteur $x = \sum_1^N \mu(A_i) a_i$ ne dépend pas de la décomposition de φ sous la forme $\sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$. On peut donc poser

$$\int_K \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^N \mu(A_i) \, a_i .$$

Lemme 4.3.2 *L'application $\varphi \mapsto \int_K \varphi \, d\mu$ est linéaire continue de $(\mathcal{E}(K,X), || \ . \ ||_\infty)$ dans X, de norme égale à $\mu(K)$.*

Preuve. La linéarité est évidente une fois qu'on sait que $\int \varphi \, d\mu$ ne dépend pas de la décomposition de φ sous la forme $\sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$. Si $\varphi \in \mathcal{E}(K,X)$, on peut écrire $\varphi = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$, où les A_i sont des boréliens de K *deux à deux disjoints*. On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \int_K \varphi \, d\mu \right\| &= \left\| \sum_i \mu(A_i) \, a_i \right\| \\ &\leq \sum_i \mu(A_i) \, ||a_i|| \\ &\leq \left(\sum_i \mu(A_i) \right) ||\varphi||_\infty \\ &\leq \mu(K) ||\varphi||_\infty . \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application linéaire $\varphi \mapsto \int_K \varphi \, d\mu$ est continue, de norme au plus égale à $\mu(K)$. Pour l'inégalité inverse, il suffit de considérer une fonction φ constante (et non nulle). $\square$

D'après le lemme et le théorème de prolongement par densité, on peut donc prolonger l'application $\varphi \mapsto \int_K \varphi \, d\mu$ à $\overline{\mathcal{E}(K,X)}$, où $\overline{\mathcal{E}(K,X)}$ est l'adhérence de $\mathcal{E}(K,X)$ dans $\ell^\infty(K,X)$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les fonctions bornées $f : K \to X$ qui sont limites uniformes de fonctions boréliennes étagées. D'après 3.3.8, $\overline{\mathcal{E}(K,X)}$ contient toutes les fonctions continues ; ainsi, on peut définir l'intégrale $\int_K f \, d\mu$ pour toute fonction continue $f : K \to X$. Le résultat suivant résume les principales propriétés de l'intégrale.

Proposition 4.3.3 *Notons $\mathcal{C}(K,X)$ l'espace des fonctions continues $f : K \to X$.*
(1) *L'application $f \mapsto \int_K f \, d\mu$ est linéaire continue de $(\mathcal{C}(K,X), || \ . \ ||_\infty)$ dans X.*
(2) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K,X)$, on a*

$$\left\| \int_K f \, d\mu \right\| \leq \int_K ||f(t)|| \, d\mu(t) .$$

(3) *Si x^* est une forme linéaire continue sur X, alors*

$$\left\langle x^*, \int_K f \, d\mu \right\rangle = \int_K \langle x^*, f(t) \rangle \, d\mu(t) .$$

Preuve. La partie (1) découle du théorème de prolongement par densité. Pour (2) et (3) on commence par prouver le résultat pour une fonction $\varphi \in \mathcal{E}(K, X)$, puis on conclut par approximation. Les détails sont laissés en exercice. $\square$

Exemple 2 *Transformation de Fourier-Plancherel*

Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa **transformée de Fourier** est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x} dx\,.$$

On sait qu'en général, la fonction $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 à l'infini, mais qu'elle n'a aucun raison d'être elle-même intégrable. Cependant, si f, en plus d'être intégrable, est aussi *de carré intégrable*, alors on peut montrer que $\hat{f}$ est elle aussi de carré intégrable, et qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\,.$$

On en déduit que la restriction de l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ à l'espace $L^1 \cap L^2$ envoie $L^1 \cap L^2$ dans L^2 et est continue de $(L^1 \cap L^2, ||\ .\ ||_2)$ dans $(L^2, ||\ .\ ||_2)$. D'après le théorème de prolongement par densité, il existe donc une application linéaire continue $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f = \hat{f}$ si $f \in L^1 \cap L^2$. Cette application $\mathcal{F}$ est la **transformation de Fourier-Plancherel**.

Il faut prendre bien garde au fait que si $f \in L^2$, alors on ne peut *pas* écrire $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$ pour $\xi \in \mathbb{R}$. Cette formule n'a de sens que si f est de plus intégrable. On peut seulement dire que $\mathcal{F}f$ est la limite en norme L^2 des $\hat{f}_n$, où (f_n) est n'importe quelle suite d'éléments de $L^1 \cap L^2$ convergeant vers f en norme L^2. Par exemple, on peut prendre $f_n = f\, \mathbf{1}_{[-n;n]}$. On a alors

$$\hat{f}_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)e^{-i\xi x}dx \quad \text{“au sens } L^2\text{”}\,.$$

Si on oublie le facteur 2π, la transformation de Fourier-Plancherel devient une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En particulier, $\mathcal{F}$ est injective et l'image de $\mathcal{F}$ est fermée dans L^2. Mais par ailleurs, il découle de la formule d'inversion de Fourier que l'image de $\mathcal{F}$ contient toutes les fonctions de la **classe de Schwartz**

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R});\ \lim_{|x|\to\infty} |x|^k \varphi^{(n)}(x) = 0 \text{ pour tous } k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Comme on sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (voir 4.4.4 pour une démonstration), on en déduit que l'image de $\mathcal{F}$ est dense dans L^2. Au total, $\mathcal{F}$ est bijective de L^2 sur L^2. Enfin. si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\hat{\varphi}(-x)$ d'après la formule d'inversion de Fourier. Autrement dit, on a $\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\psi(-x)$ pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans L^2, on en déduit que pour $g \in L^2$, on a également $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}g(-x)$ presque partout.

En résumé, on a donc le résultat suivant.

Théorème 4.3.4 *L'application $\mathcal{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ est une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$, d'inverse donnée par $\mathcal{I}^{-1}g(x) = \mathcal{I}g(-x)$. En particulier, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de L^2 sur L^2 qui préserve l'orthogonalité, et on a $\mathcal{F}^4 = id$.*

4.4 Familles bornées d'applications linéaires continues

4.4.1 Convergence "forcée"

Le résultat suivant est simple, mais extrêmement utile.

Lemme 4.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $(T_i)_{i\geq 0}$ une suite d'application linéaires continues, $T_i : E \to F$.On fait les hypothèses suivantes :*
(a) *La suite (T_i) est bornée en norme ;*
(b) *$T_i(z)$ tend vers 0 pour tout $z \in D$, où D est une partie dense de E.*
Alors $T_i(x)$ tend vers 0 pour tout $x \in E$.

Preuve. Soit $x \in E$, et fixons $\varepsilon > 0$. Posons également $M = \sup_i ||T_i||$. Comme D est dense dans E, on peut trouver $z \in D$ tel que $||x - z|| \leq \varepsilon$. On a alors

$$||T_i(x)|| \leq ||T_i(z)|| + ||T_i(z - x)|| \leq ||T_i(z)|| + M\varepsilon$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $T_i(z)$ tend vers 0, on en déduit

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} ||T_i(x)|| \leq M\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Cela termine la démonstration. □

Remarque On a énoncé le résultat pour une *suite* (T_i), mais il ressort clairement de la démonstration que le même résultat vaut pour une famille (T_i) indexée par exemple par un intervalle de $\mathbb{R}$, l'indice i ayant vocation à tendre vers une des bornes de l'intervalle.

Exemple *Unités approchées*

On sait que $L^1(\mathbb{R})$ est muni d'une structure d'algèbre commutative, la multiplication étant donnée par le produit de convolution $*$. On sait également que la transformation de Fourier change le produit de convolution en produit ordinaire : si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f} * \hat{g}$. On en déduit que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'élément unité pour le produit $*$. En effet, si e était une telle unité, on aurait $\hat{e}(\xi)\hat{g}(\xi) = \hat{e}(\xi)$ pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, et donc $\hat{e} \equiv 1$ car pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on peut trouver une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{g}(\xi) \neq 0$ (par exemple, la fonction indicatrice de l'intervalle $[\xi - 1; \xi + 1]$). Mais ceci est impossible car $\hat{e}$ doit tendre vers 0 à l'infini. On va voir qu'on peut cependant pallier à l'absence d'unité.

On dira qu'une suite $(k_i) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ est une **unité approchée** si elle vérifie les propriétés suivantes, où $| \,.\, |$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$, par exemple la norme euclidienne.

(a) La suite (k_i) est bornée en norme L^1.

(b) On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} k_i(u)\,du = 1$ pour tout i.

(c) Pour tout $\delta > 0$, on a $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_{|u|\geq\delta} |k_i(u)|\,du = 0$.

La même définition vaut pour une famille $(k_i)_{i\in I}$ paramétrée par un intervalle de $\mathbb{R}$, le paramètre i étant destiné à tendre vers une des bornes de l'intervalle. Le résultat suivant justifie l'expression "unité approchée".

Théorème 4.4.2 *Soit $(k_i)_{i\in I} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ une unité approchée.*
(1) Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est continue à support compact, alors $k_i * f$ tend vers f uniformément.
(2) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, alors $k_i * f$ tend vers f en norme L^p.

Preuve. (1) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ continue à support compact. Alors f est bornée et *uniformément* continue. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a d'après (b) :

$$\begin{aligned} f * k_i(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)k_i(u)\,du - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(f(x-u) - f(x)\Big)k_i(u)\,du\,. \end{aligned}$$

On en déduit
$$|f * k_i(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-u) - f(x)|\,|k_i(u)|\,du.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ tel que $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ si $|u - v| \leq \delta$; un tel δ existe par uniforme continuité de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout i, on a alors

$$\begin{aligned} |f * k_i(x) - f(x)| &\leq \varepsilon \times \int_{|u|<\delta} |k_i(u)|\,du + \int_{|u|\geq\delta} |f(x-u) - f(x)|\,|k_i(u)|\,du \\ &\leq C\varepsilon + 2||f||_\infty \int_{|u|\geq\delta} |k_i(u)|\,du\,, \end{aligned}$$

où on a posé $C = \sup_i ||k_i||_1$. Comme le membre de droite ne dépend pas de x, on obtient donc

$$||k_i * f - f||_\infty \leq C\varepsilon + 2||f||_\infty \int_{|u|\geq\delta} |k_i(u)|\,du$$

pour tout $i \in I$. Grâce à (a) et (b), on en déduit

$$\overline{\lim_i}\, ||k_i * f - f||_\infty \leq C\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Cela prouve que $k_i * f$ tend vers f uniformément.
Pour démontrer (2), on peut supposer que toutes les fonctions k_i ont leur support contenu dans

la boule unité $B \subseteq \mathbb{R}^d$. En effet, il découle de (c) que $\mathbf{1}_B k_i - k_i$ tend vers 0 en norme L^1, et par conséquent, si on pose $m_i = \int_B k_i$ et $\tilde{k}_i = \frac{1}{m_i}\mathbf{1}_B\, k_i$ (ce qui est possible “à partir d'un certain rang” d'après (c)), alors $\tilde{k}_i - k_i = \frac{1}{m_i}(\mathbf{1}_B k_i - k_i) + \left(\frac{1}{m_i} - 1\right) k_i$ tend vers 0 dans L^1, grâce à (a) et (b). On en déduit d'une part que la famille $(\tilde{k}_i)$ vérifie les mêmes hypothèses que (k_i), et d'autre part que $(k_i - \tilde{k}_i) * f$ tend vers 0 en norme L^p pour toute fonction $f \in L^p$, puisque $\|(k_i - \tilde{k}_i) * f\|_p \leq \|k_i - \tilde{k}_i\|_1\, \|f\|_p$. Si on sait démontrer le résultat pour $(\tilde{k}_i)$, on saura donc le faire pour (k_i).
Fixons $p \in [1\,;\infty[$, et considérons les opérateurs $T_i : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ définis par

$$T_i(f) = k_i * f - f\,.$$

Les T_i sont bien définis, et l'inégalité $||k_i * f||_p \leq ||k_i||_1\, ||f||_p$ montre que T_i est un opérateur linéaire continu, de norme au plus égale à $||k_i||_1 + 1$. Par conséquent, la suite (T_i) est bornée en norme. De plus, si f est continue à support compact, alors $T_i(f)$ tend vers 0 uniformément, d'après le cas (1). Comme de plus les $T_i(f)$ ont leur support contenu dans le compact fixe $B + \mathrm{supp}(f)$, on en déduit que $T_i(f)$ tend vers 0 en norme L^p, pour toute fonction f continue à support compact. Comme l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, on peut donc conclure que $T_i(f)$ tend vers 0 en norme L^p pour toute fonction $f \in L^p$. Cela termine la démonstration. □

Exemple. Si k est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} k = 1$, alors on vérifie sans difficulté que la famille $(k_\lambda)_{\lambda>0}$ définie par

$$k_\lambda(u) = n\lambda^d k(\lambda u)$$

est une unité approchée dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (ici, le paramètre λ a vocation à tendre vers l'infini). De plus, si k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, alors la formule

$$k_\lambda * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_\lambda(x-y)\varphi(y)\, dy$$

montre que si $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, est continue à support compact, alors toutes les fonctions $k_\lambda * \varphi$ sont (définies partout et) de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact : cela découle du théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 4.4.3 *Toute fonction continue à support compact $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ peut être approchée uniformément et en norme L^p, $1 \leq p < \infty$, par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.*

Remarque. L'approximation par convolution a une propriété intéressante : si la fonction φ prend ses valeurs dans un certain convexe fermé $C \subseteq \mathbb{K}$, alors on peut l'approcher par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact prenant également leurs valeurs dans C. Il suffit pour cela de considérer les aproximations $k_\lambda * \varphi$ associées à une fonction k réelle positive à support compact K et vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} k = 1$: on aura alors $k_\lambda * \varphi(x) = \int_K \varphi(x-y)\, d\mu_\lambda(x)$, où μ_λ est une mesure de probabilité, d'où le résultat d'après le lemme 5.3.10. En particulier, si φ est réelle positive, on pourra l'approcher par des fonctions réelles positives. De même, on peut toujours supposer que les fonctions approchantes sont majorées en module par $\|\varphi\|_\infty$.

Comme les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p si $p < \infty$, le corollaire précédent entraîne :

Corollaire 4.4.4 *Si $1 \leq p < \infty$, alors l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En particulier, la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

4.4.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Rappelons qu'une famille d'applications linéaires continues $(T_i)_{i\in I}$ entre deux espaces vectoriels normés X et Y est dite **simplement bornée** si, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{T_i(x);\ i \in I\}$ est une partie bornée de Y ; autrement dit, si pour tout $x \in X$, on peut trouver une constante $C_x < \infty$ telle que $\|T_i(x)\| \le C_x$ pour tout $i \in I$.
Si la famille (T_i) est bornée *en norme*, alors elle est bien sûr simplement bornée : pour $x \in X$, on peut prendre $C_x = C\|x\|$, où $C = \sup_i \|T_i\|$. La réciproque est fausse en général : par exemple, si on munit l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ de la norme définie par $\|P\| = \sup\{|P(t)|;\ t \in [0;1]\}$, alors la suite d'applications linéaires $T_n : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définies par $T_n(P) = P^{(n)}$ est simplement bornée (pour P fixé, on a $T_n(P) = 0$ si n est assez grand), mais elle n'est pas bornée en norme ($\|T_n\| \ge \|T_n(X^n)\| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). On a cependant le résultat suivant.

Théorème 4.4.5 (Banach-Steinhaus)
Soient X un espace de Banach*, Y un espace vectoriel normé, et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues, $T_i : X \to Y$. Si la famille (T_i) est simplement bornée, alors elle est bornée en norme.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F_n = \{x \in X :\ \forall i \in I \ \ ||T_i(x)|| \le n\}\,.$$

Comme les T_i sont continues, les F_n sont des fermés de X. De plus, on a $\bigcup_n F_n = X$ car la famille (T_i) est simplement bornée. Comme X est un espace de Banach, le théorème de Baire assure que l'un des F_n est d'intérieur non vide. On peut donc trouver un entier N, un point $x_0 \in X$ et un nombre $r > 0$ tels que

$$\forall x \in \overline{B}(x_0, r)\ \ \forall i \in I \ \ ||T_i(x)|| \le N\,.$$

Par linéarité de T, la même inégalité est valable pour $x \in -B(x_0, r) = B(-x_0, r)$. En écrivant $h = \frac{1}{2}((-x_0 + h) + (x_0 + h))$, on en déduit que pour $h \in \overline{B}(0, r)$ et $i \in I$, on a

$$||T_i(h)|| \le \frac{1}{2}\left(||T_i(-x_0 + h)|| + ||T_i(x_0 + h)||\right) \le N\,.$$

On obtient ainsi $||T_i|| \le N/r$ pour tout $i \in I$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 4.4.6 *Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues, $T_n : X \to Y$, où X est un espace de Banach et Y un espace vectoriel normé. On suppose que la suite (T_n) est simplement convergente, autrement dit que $T_n(x)$ converge dans Y pour tout $x \in X$. Alors $T = \lim_n T_n$ est une application linéaire continue.*

Preuve. Il est clair que T est linéaire. De plus, la suite (T_n) est simplement bornée, donc bornée en norme d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Si on pose $C = \sup_n ||T_n||$, alors $||T_n(x)|| \le C\,||x||$ pour tout n et pour tout $x \in X$, donc $||T(x)|| \le C\,||x||$ pour tout $x \in X$. Par conséquent, T est continue. □

Exemple *Divergence des séries de Fourier*

Comme application du théorème de Banach-Steinhaus, on va démontrer un résultat négatif concernant la convergence des séries de Fourier.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique intégrable sur $[-\pi;\pi]$, ses **coefficients de Fourier** sont définis (pour $k \in \mathbb{Z}$) par

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\,.$$

Les **sommes partielles de Fourier** de la fonction f sont les polynômes trigonométriques S_nf définis par

$$S_nf(t) = \sum_{|k|\leq n} c_k(f)\,e^{ikt}\,.$$

On sait par exemple que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors S_nf tend vers f uniformément. En revanche, on a le résultat suivant.

Proposition 4.4.7 *Il existe une fonction continue 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que la suite $(S_nf(0))$ n'est pas bornée. En particulier, $S_nf(0)$ ne converge pas vers $f(0)$.*

La preuve repose sur un calcul classique : pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_nf(x) = D_n * f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt\,,$$

où D_n est le **noyau de Dirichlet**, défini par

$$D_n(t) = \sum_{|k|\leq n} e^{ikt} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,.$$

Comme D_n est une fonction paire, on a donc

$$S_nf(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,dt\,.$$

Notons $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel constitué par les fonctions continues 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Alors $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\ell^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}), ||\ .\ ||_\infty)$, donc c'est un espace de Banach pour la norme $||\ .\ ||_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une forme linéaire $\Phi_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}$ par

$$\Phi_n(f) = S_nf(0)\,.$$

Lemme 4.4.8 Φ_n *est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_{2\pi}$, avec $||\Phi_n|| = ||D_n||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt$.*

Preuve du lemme. On a $|\Phi_n(f)| \leq ||f||_\infty \times ||D_n||_1$, donc la forme linéaire Φ_n est continue, de norme au plus égale à $||D_n||_1$. Inversement, il est facile de construire une suite $(f_k) \subseteq \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $||f_k||_\infty \leq 1$ pour tout k et $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = signe(D_n(t))$ pour tout $t \in [-\pi;\pi]$. D'après le théorème de convergence dominée, $\Phi_n(f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(t)D_n(t)\,dt$ tend vers $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt = ||D_n||_1$ quand

k tend vers l'infini. Comme $||f_k||_\infty \leq 1$ pour tout k, on en déduit $||\Phi_n|| \geq ||D_n||_1$, ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Preuve de 4.4.7. Avec les notations introduites, il s'agit de montrer que la suite (Φ_n) n'est pas simplement bornée. Comme $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace de Banach, il suffit pour cela, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, de montrer que la suite (Φ_n) n'est pas bornée en norme. Autrement dit, on veut montrer que la suite $(||D_n||_1)$ n'est pas bornée. Mais on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |D_n(t)|\,dt &= \int_0^\pi \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt \\ &\geq 2\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}\,dt\end{aligned}$$

car $|\sin u| \leq u$ si $u \geq 0$. On en déduit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \geq 2\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,du,$$

et donc $\lim_{n\to\infty} ||D_n||_1 = +\infty$. Cette contradiction achève la preuve. $\square$

4.5 Théorèmes de l'image ouverte et du graphe fermé

4.5.1 Théorème de l'image ouverte

Théorème 4.5.1 (théorème de majoration automatique)
Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On suppose que T est surjective. Alors il existe une constante $C < \infty$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $y \in Y$, il existe un $x \in X$ tel que $T(x) = y$ et $||x|| \leq C\,||y||$. Ainsi, on peut choisir un antécédent de y par T en contrôlant sa norme.

La démonstration est basée sur deux lemmes. Dans ce qui suit, on note B_E la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé E.

Lemme 4.5.2 *Soient X un espace vectoriel normé et Y un espace de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est surjectif, alors $\overline{T(B_X)}$ est d'intérieur non vide dans Y.*

Preuve. Comme T est surjectif et $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_X$, on a

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nB_X)\,,$$

donc a fortiori $Y = \bigcup_n \overline{T(nB_X)}$. Comme Y est un espace de Banach, le théorème de Baire assure que l'un des ensembles fermés $F_n = \overline{T(nB_X)}$ est d'intérieur non vide dans Y. Comme on a $F_n = n\overline{T(B_X)}$, cela montre que $\overline{T(B_X)}$ est d'intérieur non vide. $\square$

Lemme 4.5.3 *Soient X un espace de Banach et Y un espace vectoriel normé. Soit également $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, et soit $M \in \mathbb{R}^+$. On suppose que $\overline{T(MB_X)}$ contient la boule B_Y. Alors, pour tout $C > M$, $T(CB_X)$ contient B_Y.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout $k < 1$, on a $B_Y \subseteq T(\frac{M}{1-k}\, B_X)$. Fixons $k < 1$ et $y \in B_Y$. Par hypothèse, on peut trouver $x_0 \in X$ tel que $||x_0|| \leq M$ et $||y - T(x_0)|| \leq k$. Alors $y_1 = \frac{1}{k}(y - T(x_0)) \in B_Y$, donc on peut trouver $x_1 \in X$ tel que $||x_1|| \leq M$ et $||y_1 - T(x_1)|| \leq k$. En multipliant par k, on obtient alors

$$||y - T(kx_1 + x_0)|| \leq k^2 .$$

On pose alors $y_2 = \frac{1}{k^2}\Big(y - T(kx_1 + x_0)\Big)$, on répète le raisonnement précédent, et ainsi de suite. On voit ainsi qu'on peut construire par récurrence une suite $(x_n) \subseteq X$ telle que $||x_n|| \leq M$ et

$$||T(k^n x_n + \ldots + kx_1 + x_0) - y|| \leq k^{n+1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum k^n x_n$ est absolument convergente car $||k^n x_n|| \leq M\, k^n$ et $k < 1$. Comme X est un espace de Banach, cette série converge dans X et on peut donc poser

$$x = \sum_0^\infty k^n x_n .$$

Comme T est continue, l'inégalité précédente montre qu'on a $T(x) = y$. De plus, on a aussi $||x|| \leq M \sum_0^\infty k^n = \frac{M}{1-k}$. Comme $y \in B_Y$ est arbitraire, cela termine la démonstration. $\square$

Remarque. On a un énoncé analogue avec des boules ouvertes (qui se déduit du lemme précédent) : *si $\overline{T(B(0,M))}$ contient $\mathring{B}_Y$, alors $T(B(0,M))$ contient déjà $\mathring{B}_Y$.*

Preuve de 4.5.1. Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjectif. D'après le lemme 4.5.2, $\overline{T(B_X)}$ est d'intérieur non vide. On peut donc trouver $y_0 \in Y$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(y_0, r) \subseteq \overline{T(B_X)}$. Comme T est linéaire, $\overline{(T(B_X))}$ est un ensemble convexe et symétrique par rapport à 0, et on en déduit que $\overline{T(B_X)}$ contient l'ensemble $\frac{1}{2}(\overline{B}(y_0, r) - \overline{B}(y_0, r))$, autrement dit $\overline{B}(0, r) \subseteq \overline{T(B_X)}$. Ainsi, on a $B_Y \subseteq \overline{T(MB_X)}$, où $M = \frac{1}{r}$. D'après le lemme 4.5.3, on en déduit que si $C > M$, alors $T(CB_X)$ contient B_Y. Par homogénéité, cela termine la démonstration. $\square$

Corollaire 4.5.4 (théorème d'isomorphisme de Banach)
Soient X et Y deux espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est bijectif, alors T^{-1} est continu.

Preuve. Si T est bijectif, la conclusion du théorème s'écrit : $||T^{-1}(y)|| \leq C\,||y||$ pour tout $y \in Y$. $\square$

Corollaire 4.5.5 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(X,Y)$,les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *T est injectif et à image fermée ;*
(2) *Il existe une constante $c > 0$ telle que $||T(x)|| \geq c\,||x||$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Supposons (2) vérifiée. Alors T est visiblement injectif. De plus, si $(y_n) = (T(x_n))$ est une suite de points de $\mathrm{Im}(T)$ convergeant vers $y \in Y$, alors les inégalités $||x_p - x_q|| \leq c^{-1}||y_p - y_q||$ montrent que la suite (x_n) est de Cauchy dans X, donc convergente dans X puisque X est un espace de Banach. Si on pose $x = \lim x_n$, alors $y = T(x)$ par continuité de T, donc $y \in \mathrm{Im}(T)$. Par conséquent, T est à image fermée.
Inversement, supposons que T soit injectif et à image fermée. Alors $Z = \mathrm{Im}(T)$ est un espace de Banach, car c'est un sous-espace fermé de l'espace de Banach Y, et T est une bijection linéaire continue de X sur Z. D'après le théorème d'isomorphisme de Banach, T^{-1} est continue sur Z, ce qui est exactement la condition (2). □

Le théorème de majoration automatique porte habituellement le nom de **théorème de l'image ouverte**. Cela tient au corollaire suivant.

Corollaire 4.5.6 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est surjectif, alors T est une application ouverte : pour tout ouvert $O \subseteq X$, l'ensemble $T(O)$ est un ouvert de Y.*

Preuve. Soit O un ouvert de X, et soit $y \in T(O)$. On cherche $r > 0$ tel que $B(y, r) \subseteq T(O)$. Soit $x \in X$ tel que $T(x) = y$. Pour tout $r > 0$, on a $B(y, r) = T(x) + r\mathring{B}_Y$, et donc $B(y, r) \subseteq T(x) + rT(C\mathring{B}_X) = T(B(x, Cr))$, où la constante C est donnée par le théorème de majoration automatique. Comme O est ouvert, on peut maintenant choisir $r > 0$ tel que $B(x, Cr) \subseteq O$, et on a alors $B(y, r) \subseteq T(O)$. □

Exemple *Non surjectivité de la transformation de Fourier*

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx\,.$$

On sait que $\hat{f}$ est une fonction continue, tendant vers 0 à l'infini. De plus, on a $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$. Par conséquent, si on note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $||\,.\,||_\infty$, alors la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. De plus, on sait que la transformation de Fourier est *injective* : si $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ d'après la formule d'inversion de Fourier. Enfin, l'image de la transformation de Fourier est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, car elle contient par exemple la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En revanche :

Proposition 4.5.7 *La transformation de Fourier n'est pas surjective de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Autrement dit, il existe au moins une fonction $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.*

Preuve. Si la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ était surjective, elle serait bijective de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Comme $L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach, $\mathcal{F}^{-1}$ serait continue, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach. Il existerait donc une constante $C < \infty$ telle que

$$||f||_1 \leq C\,||\hat{f}||_\infty$$

pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$. On va montrer que cela n'est en fait pas vrai.
Pour $\varepsilon > 0$, notons g_ε la fonction (intégrable) valant 1 sur $[-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$, nulle hors de $[-1-\varepsilon; 1+\varepsilon]$, et affine sur les intervalles $[-1-\varepsilon; -1+\varepsilon]$ et $[1-\varepsilon; 1+\varepsilon]$. Un calcul sans difficulté majeure montre qu'on a

$$g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathbf{1}_{[-1;1]} * \mathbf{1}_{[-\varepsilon;\varepsilon]}\,.$$

En utilisant la formule $\widehat{u * v} = \hat{u}\hat{v}$, on en déduit

$$\hat{g}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin(\varepsilon x)}{x} = f_\varepsilon(x)\,.$$

La fonction f_ε est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après la formule d'inversion de Fourier (et en observant que g_ε est paire), on peut donc écrire

$$g_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\,\hat{f}_\varepsilon\,.$$

Comme $||g_\varepsilon||_\infty = 1$, on doit donc avoir $||f_\varepsilon||_1 \leq 2\pi C$ pour tout $\varepsilon > 0$. Mais

$$||f_\varepsilon||_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{|\sin x|\,|\sin(\varepsilon x)|}{x^2}\,dx\,,$$

et comme $|\sin(\varepsilon x)| \geq \frac{2}{\pi}\varepsilon x$ si $x \in [0\,;\frac{\pi}{2\varepsilon}]$, on en déduit

$$||f_\varepsilon||_1 \geq \frac{2}{\pi\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \frac{|\sin x|}{x^2} \times \varepsilon x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \frac{|\sin x|}{x}\,dx\,.$$

Comme $\frac{|\sin x|}{x}$ n'est pas intégrable à l'infini, on a donc $\lim_{\varepsilon\to 0} ||f_\varepsilon||_1 = +\infty$, et cette contradiction achève la preuve. □

4.5.2 Caractérisations de la surjectivité

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations de la surjectivité pour un opérateur linéaire.

Théorème 4.5.8 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *T est surjectif;*
(2) *Il existe une constante $C < \infty$ telle que pour tout $y \in Y$, on peut trouver $x \in X$ vérifiant $||x|| \leq C||y||$ et $T(x) = y$;*
(3) *Il existe une constante $C < \infty$ telle que $\overline{T(CB_X)}$ contient B_Y ;*
(4) *Il existe deux constantes $C < \infty$ et $k < 1$ telles que pour tout $y \in B_Y$, on peut trouver $x \in X$ vérifiant $||x|| \leq C$ et $||T(x) - y|| \leq k$.*

Preuve. On a déjà montré que (1) entraîne (2). Il est clair que (2) entraîne (3), et que (3) entraîne (4). Enfin, la preuve du lemme 4.5.3 a établi que si (4) est vérifiée, alors $B_Y \subseteq T(\frac{C}{1-k}B_X)$. En particulier, (4) entraîne (1). □

Exemple 1 *Quotients de* $\ell^1(\mathbb{N})$

Comme exemple d'utilisation de la propriété (3), on va montrer que "tout espace de Banach séparable est un quotient de $\ell^1(\mathbb{N})$". Ainsi, l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ est en un certain sens "universel" parmi les espaces de Banach séparables.

Proposition 4.5.9 *Si X est un espace de Banach séparable, alors il existe une surjection linéaire continue de $\ell^1(\mathbb{N})$ sur X.*

Preuve. Soit $\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable et dense dans la boule unité de X. Si $\alpha = (\alpha_n)\in\ell^1(\mathbb{N})$, alors la série $\sum \alpha_n x_n$ est absolument convergente, donc convergente dans X puisque X est un espace de Banach. On peut donc définir $T:\ell^1(\mathbb{N})\to X$ par

$$T(\alpha)=\sum_0^\infty \alpha_n x_n\,.$$

L'application T est visiblement linéaire. De plus, T est continue et $||T||\leq 1$ car $||T(\alpha)||\leq \sum_0^\infty |\alpha_n|\,||x_n||\leq ||\alpha||_1$ pour tout $\alpha\in\ell^1(\mathbb{N})$. Enfin, par définition de T, on a $T(e_n)=x_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où on a noté e_n le n-ième vecteur de la "base canonique" de $\ell^1(\mathbb{N})$. Par conséquent, $T(B_{\ell^1})$ contient $\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}$, et est donc dense dans B_X. On peut donc appliquer le théorème précédent pour conclure que T est surjectif. □

Exemple 2 *Théorème d'extension de Tietze*

Comme exemple d'utilisation de la propriété (4), on va maintenant démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.5.10 (théorème d'extension de Tietze)
Soit (E,d) un espace métrique, et soit C un fermé de E. Si $f:C\to\mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, alors f se prolonge en une fonction continue bornée définie sur E tout entier ; autrement dit, il existe une fonction continue bornée $\tilde f:E\to\mathbb{R}$ telle que $\tilde f_{|C}=f$.

Preuve. Si F est un espace métrique, notons $\mathcal{C}_b(F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions continues bornées $\varphi:F\to\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{C}_b(F)$ est un sous-espace fermé de $(\ell^\infty(F,\mathbb{R}),||\ .\ ||_\infty)$, donc c'est un espace de Banach pour la norme $||\ .\ ||_\infty$. Soit $T:\mathcal{C}_b(E)\to\mathcal{C}_b(C)$ l'opérateur de restriction, défini par $T(\varphi)=\varphi_{|C}$. Il est clair que T est linéaire continu, de norme au plus égale à 1. Il s'agit de montrer que l'opérateur T est surjectif. D'après le critère (3) du théorème précédent (avec $C=1$ et $k=2/3$), il suffit pour cela de vérifier le fait suivant.

Fait *Si $f:C\to[-1;1]$ est continue, alors il existe une fonction continue $\tilde f:E\to[-1;1]$ telle que $|\tilde f(x)-f(x)|\leq 2/3$ pour tout $x\in C$.*

Preuve du fait. Fixons $f:C\to[-1;1]$ continue. Les ensembles $C_0=\{x\in C;\ f(x)\leq 1/3\}$ et $C_1=\{x\in C;\ f(x)\geq 2/3\}$ sont des fermés de C, donc de E, et ils sont disjoints. Il existe donc une fonction continue $\tilde f^+:E\to[0;1]$ telle que $\tilde f^+(x)=0$ pour $x\in C_0$ et $\tilde f^+(x)=1$ pour $x\in C_1$: il suffit de poser

$$\tilde f^+(x)=\frac{d(x,C_0)}{d(x,C_0)+d(x,C_1)}\,.$$

Par définition, on a donc $\tilde{f}^+(x) = 1$ si $x \in C$ vérifie $f(x) \geq 2/3$, et $\tilde{f}^+(x) = 0$ si $x \in C$ vérifie $f(x) \leq 1/3$. De même, il existe une fonction continue $\tilde{f}^- : E \to [0;1]$ telle que $\tilde{f}^-(x) = 0$ si $f(x) \geq -1/3$ et $\tilde{f}^-(x) = 1$ si $f(x) \leq -2/3$ ($x \in C$). Posons alors $\tilde{f} = \tilde{f}^+ - \tilde{f}^-$. La fonction $\tilde{f}$ est continue, et à valeurs dans $[-1;1]$. Si $x \in C$, on a $\tilde{f}(x) = -1$ si $f(x) \leq -2/3$, $\tilde{f}(x) = 1$ si $f(x) \geq 2/3$, $\tilde{f}(x) = 0$ si $|f(x)| \leq 1/3$, $0 \leq \tilde{f}(x) \leq 1$ si $1/3 \leq f(x) \leq 2/3$, et $-1 \leq \tilde{f}(x) \leq 0$ si $-2/3 \leq f(x) \leq -1/3$. On constate donc qu'on a $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq 2/3$ pour tout $x \in C$. □

4.5.3 Théorème du graphe fermé

Si E et F sont deux espaces métriques, le **graphe** d'une application $f : E \to F$ est l'ensemble

$$G_f = \{(x,y) \in E \times F;\; f(x) = y\}\,.$$

On a vu au chapitre 1 que si l'application f est continue, alors le graphe de f est fermé dans le produit $E \times F$. La réciproque est fausse en général : par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 8$ n'est pas continue, mais son graphe est fermé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Même dans le cas des applications *linéaires*, la fermeture du graphe n'entraîne pas la continuité. Par exemple, si $E = \mathcal{C}([0;1])$, alors l'application linéaire $i = id : (E, ||\,.\,||_\infty) \to (E, ||\,.\,||_1)$ est continue car $||\,.\,||_1 \leq ||\,.\,||_\infty$. Par conséquent, le graphe de i est fermé dans $(E, ||\,.\,||_\infty) \times (E, ||\,.\,||_1)$, donc le graphe de $i^{-1} : (E, ||\,.\,||_1) \to (E, ||\,.\,||_\infty)$ est fermé dans $(E, ||\,.\,||_1) \times (E, ||\,.\,||_\infty)$. Mais i^{-1} n'est pas continue car les normes $||\,.\,||_1$ et $||\,.\,||_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([0;1])$.

On a cependant le résultat suivant, valable pour des aplications linéaires *entre espaces de Banach*.

Théorème 4.5.11 (théorème du graphe fermé)
Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ une application linéaire. On suppose que le graphe de T est fermé dans $X \times Y$. Alors T est continue.

Preuve. On munit $X \times Y$ d'une norme produit quelconque, par exemple la norme définie par $\|(x,y)\| = \mathrm{Max}\,(\|x\|_X, \|y\|_Y)$. Comme X et Y sont des espaces de Banach, on vérifie alors sans difficulté que $X \times Y$ est également un espace de Banach. Notons G le graphe de T. Par hypothèse, G est un sous-espace vectoriel fermé de $X \times Y$, donc G est un espace de Banach. Définissons alors les projections $\pi_X : G \to X$ et $\pi_Y : G \to Y$ par $\pi_X(x,y) = x$ et $\pi_Y(x,y) = y$. Par définition, π_X est une bijection linéaire continue de G sur X, et $\pi_X^{-1}(x) = (x, T(x))$ pour tout $x \in X$. Comme G et X sont des espaces de Banach, le théorème d'isomorphisme de Banach assure que π_X^{-1} est continue. Comme $T = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}$, on en déduit que T est également continue. □

Remarque. On vient de voir que le théorème du graphe fermé est une conséquence facile du théorème d'isomorphisme de Banach. Inversement, le théorème d'isomorphisme de Banach se déduit du théorème du graphe fermé : si $T : X \to Y$ est linéaire continue bijective, alors son graphe est fermé (par continuité), donc le graphe de T^{-1} aussi, donc T^{-1} est continue.

Exemple 1 (théorèmes de Hellinger-Toeplitz)
Soit H un espace de Hilbert, et soit $T : H \to H$ une application linéaire.
(1) *On suppose qu'il existe une application linéaire $S : H \to H$ telle que $\langle S(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$. Alors T est continue.*

(2) *On suppose que H est réel et qu'on a $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. Alors T est continu.*

Preuve. (1) Soit G le graphe de T, et soit $(x_n, T(x_n))$ une suite dans G convergeant vers un point $(x, y) \in H \times H$. Pour $z \in H$, on a alors

$$\langle z, T(x)\rangle = \langle S(z), x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S(z), x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, T(x_n)\rangle = \langle z, y\rangle .$$

Comme $z \in H$ est quelconque, cela prouve qu'on a $y = T(x)$, et donc $(x, y) \in G$. Ainsi, le graphe de T est fermé dans $H \times H$, donc T est continue.
(2) On applique à nouveau le théorème du graphe fermé. Soit $(x_n, T(x_n))$ une suite de points du graphe de T convergeant vers $(x, y) \in H \times H$. Il s'agit de montrer que $y = T(x)$. Quitte à remplacer x_n par $x_n - x$ et y par $y - T(x)$, on peut en fait supposer $x = 0$. Ainsi, x_n tend vers 0, $T(x_n)$ tend vers y, et on veut montrer qu'on a $y = 0$.
Soit $h \in H$ quelconque. On a $\langle T(x_n + h), x_n + h\rangle \geq 0$, autrement dit

$$\langle T(x_n), x_n\rangle + \langle T(h), h\rangle + \langle T(x_n), h\rangle + \langle T(h), x_n\rangle \geq 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quand n tend vers l'infini, $\langle T(h), x_n\rangle$ et $\langle T(x_n), x_n\rangle$ tendent vers 0 car x_n tend vers 0 et $T(x_n)$ reste borné. Comme $\langle T(x_n), h\rangle$ tend vers $\langle y, h\rangle$, on obtient donc

$$\langle T(h), h\rangle + \langle y, h\rangle \geq 0.$$

En remplaçant h par λh, on en déduit $\lambda^2\langle T(h), h\rangle + \lambda\langle y, h\rangle \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui n'est possible que si $\langle y, h\rangle = 0$. Comme $h \in H$ est arbitraire, on a donc $y = 0$. $\square$

Exemple 2 (projections)
Soit X un espace de Banach, et soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de X tels que $X = E_1 \oplus E_2$. On note $p_i : X \to E_i$ les projections déterminées par cette décomposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) *Les deux projections p_1 et p_2 sont continues ;*
(2) *Les sous-espaces E_1 et E_2 sont fermés dans X.*

Preuve. On a $E_1 = \mathrm{Ker}(p_1 - Id)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p_1)$, donc il est clair que (1) entraîne (2). Inversement, supposons (2) vérifiée. Soit $G \subseteq X \times E_1$ le graphe de p_1, et soit $(x_n, p_1(x_n))$ une suite de points de G convergeant vers $(x, y) \in X \times E_1$. Alors $y \in E_1$, et on a on a aussi $x - p_1(y) \in E_2$ car $x_n - p_1(x_n) \in E_2$ pour tout n et E_2 est fermé dans X. On en déduit $y = p_1(x)$, ce qui prouve que le graphe de p_1 est fermé dans $X \times E_1$. Comme X est un espace de Banach et E_1 également puisque E_1 est fermé dans X, on peut appliquer le théorème du graphe fermé. Ainsi, p_1 est continue, donc $p_2 = Id - p_1$ également. $\square$

Chapitre 5

Dualité

5.1 Le dual d'un espace vectoriel normé ; exemples

Si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le **dual** de E est l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur $\mathbb{K}$. On le note E^*, et on munit E^* de la norme subordonnée à la norme de E. On notera souvent x^*, y^*, z^* les éléments de E^*, et $\langle x^*, x\rangle$ l'action d'une forme linéaire $x^* \in E^*$ sur un vecteur $x \in E$.

Le résultat suivant a déjà été démontré.

Théorème 5.1.1 *Si E est un espace vectoriel normé, alors E^* est un espace de Banach.*

5.1.1 Dual d'un espace de Hilbert

Dans cette section, H est un espace de Hilbert réel ou complexe, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$. Rappelons que dans le cas complexe, $\langle x, y\rangle$ est linéaire par rapport à y et antilinéaire par rapport à x. Le théorème de la projection orthogonale va permettre de décrire complètement les formes linéaires continues sur H.

Lemme 5.1.2 *Soit $a \in H$, et définissons $\Phi_a : H \to \mathbb{K}$ par $\Phi_a(x) = \langle a, x\rangle$. Alors l'application Φ_a est une forme linéaire continue sur H, et $||\Phi_a|| = ||a||$.*

Preuve. La linéarité est évidente. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\Phi_a(x)| \leq ||a||\,||x||$ pour tout $x \in H$, donc Φ_a est continue et $||\Phi_a|| \leq ||a||$. Enfin, si on pose $u = \frac{a}{||a||}$ (en supposant $a \neq 0$), on a $||u|| = 1$ et $\Phi_a(u) = ||a||$, d'où $||\Phi_a|| \geq ||a||$. □

Théorème 5.1.3 *Toute forme linéaire continue sur H est du type Φ_a, pour un unique $a \in H$.*

Preuve. Soit Φ une forme linéaire continue sur H ; on suppose $\Phi \neq 0$, sinon il n'y a rien à démontrer. Posons $E = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Comme Φ est continue, E est un sous-espace vectoriel fermé de H, et $E \neq H$ puisque $\Phi \neq 0$. On peut donc trouver un vecteur $b \in H$ non nul et orthogonal à E : il suffit de poser $b = x - p_E(x)$, où x est un vecteur donné n'appartenant pas à E. Alors $\mathrm{Ker}(\Phi_b)$ contient E, et comme E et $\mathrm{Ker}(\Phi)$ sont deux hyperplans, on a $\mathrm{Ker}(\Phi_b) = E$. Les formes linéaires Φ et Φ_b

ont donc le même noyau, et elles sont par conséquent proportionnelles. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi = \lambda \Phi_b$, d'où $\Phi = \Phi_a$, avec $a = \overline{\lambda} b$. Pour l'unicité, il suffit d'observer que si $\Phi_a = \Phi_{a'}$, alors $\|a - a'\| = \|\Phi_{a-a'}\| = 0$. □

5.1.2 dual de L^p

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour simplifier les énoncés qui vont suivre, on supposera que la mesure μ est σ-finie, bien que cela ne soit pas toujours nécessaire.

Lemme 5.1.4 *Soit $p \in [1\,;\infty]$, et notons q l'exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Si $g \in L^q(\Omega, \mu)$, alors on définit une forme linéaire continue $\Phi_g : L^p(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$ en posant*

$$\Phi_g(f) = \int_\Omega f g \, d\mu \, .$$

De plus, on a $||\Phi_g|| = ||g||_q$.

Preuve. Si $f \in L^p(\Omega)$, alors, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \le ||f||_p \times ||g||_q \, .$$

En particulier, la fonction fg est μ-intégrable, donc l'application Φ_g est bien définie. Comme Φ_g est visiblement linéaire, l'inégalité précédente montre qu'elle est continue, avec $||\Phi_g|| \le ||g||_q$.
Pour montrer qu'on a en fait $||\Phi_g|| = ||g||_q$, on traite d'abord le cas $1 < p < \infty$, donc $1 < q < \infty$. Par homogénéité, peut supposer $||g||_q = 1$. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ une fonction mesurable telle que $|\varphi(x)| \equiv 1$ et $\varphi g = |g|$. Posons $f = \varphi \times |g|^{q/p}$. Alors $|f|^p = |g|^q$, donc $f \in L^p$ et $||f||_p = ||g||_q^{q/p} = 1$. De plus, on a $fg = |g| \times |g|^{q/p}$ par définition de φ, autrement dit $fg = |g|^q$ car $1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p} = q$. Par conséquent, on a $\Phi_g(f) = \int_\Omega fg = ||g||_q^q = 1$. On en déduit $||\Phi_g|| \ge 1 = ||g||_q$, d'où finalement $||\Phi_g|| = ||g||_q$.
Montrons maintenant que dans le cas $p = 1$, $q = \infty$, on a $||\Phi_g|| = ||g||_\infty$. On sait déjà que $||\Phi_g|| \le ||g||_\infty$. Pour l'inégalité inverse, il suffit de montrer que pour tout nombre $\alpha < ||g||_\infty$, on peut trouver $f \in L^1$ telle que $||f||_1 \le 1$ et $|\int_\Omega fg \, d\mu| \ge \alpha$. Fixons un tel α. Alors l'ensemble

$$A = \{x;\ |g(x)| \ge \alpha\}$$

est de mesure strictement positive. Comme μ est σ-finie, on peut donc trouver un ensemble mesurable $B \subseteq A$ tel que $0 < \mu(B) < \infty$. Posons $f = \frac{\varphi \mathbf{1}_B}{\mu(B)}$, où φ est choisie comme précédemment ($|\varphi| \equiv 1$ et $\varphi g = |g|$). Alors $|f| = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}$, donc $f \in L^1$ et $||f||_1 = 1$. De plus, on a $fg = \frac{|g| \mathbf{1}_B}{\mu(B)} \ge \frac{\alpha \mathbf{1}_B}{\mu(B)}$, et donc $\int_\Omega fg \, d\mu \ge \alpha$. On a donc bien montré que $||\Phi_g|| = ||g||_\infty$.
Le cas $p = \infty$, $q = 1$ est laissé en exercice. □

Digression. En échangeant les rôles de p et q, on voit qu'on a montré le résultat suivant : si (Ω, μ) est un espace mesuré σ-fini et si $f : \Omega \to [0\,;\infty]$ est une fonction mesurable, avec $f \in L^p$, alors

$$\left(\int_\Omega f(t)^p \, d\mu(t) \right)^{1/p} = \sup \left\{ \int_\Omega fg \, d\mu;\ 0 \le g \in L^q \ ,\ \|g\|_q \le 1 \right\} .$$

Ce résultat est en fait valable même si $f \notin L^p$ (auquel cas les deux membres de l'égalité précédent valent $+\infty$). Pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone à une suite $(f_n) \subset L^p$ convergeant en croissant vers f ; par exemple, on peut poser $f_n = \mathbf{1}_{\Omega_n}\mathbf{1}_{|f|\leq n}f$, où (Ω_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables de mesure finie telle que $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$.
Comme application, on peut par exemple démontrer une version assez générale de l'inégalité de Minkowski : si (X, μ) et (Y, ν) sont deux espaces mesurés σ-finis et si $u : X \times Y \to [0\,;\infty]$ est mesurable, alors

$$\left[\int_X \left(\int_Y u(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leq \int_Y \left[\int_X u(x,y)^p\,d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y)\,.$$

Il suffit d'appliquer l'identité précédente à $f_1(x) = \int_Y u(x,y)\,d\nu(y)$, d'utiliser le théorème de Fubini, puis de réappliquer l'identité précédente à $f_2(y) = \int_X u(x,y)\,d\mu(x)$.

On admettra le résultat suivant, même si sa démonstration n'est pas démesurément compliquée.

Théorème 5.1.5 *Si $p < \infty$, alors toute forme linéaire continue sur $L^p(\Omega, \mu)$ est du type Φ_g, pour une unique fonction $g \in L^q(\Omega, \mu)$.*

Corollaire 5.1.6 *Si $p < \infty$, alors $L^p(\Omega)^*$ s'identifie isométriquement à $L^q(\Omega)$, où q est l'exposant conjugué de p.*

Remarque. Pour $p = \infty$, ce résultat est faux, sauf cas trivial : si $L^\infty(\Omega)$ est de dimension infinie, il existe toujours des formes linéaires continues sur L^∞ qui ne proviennent pas de fonctions $g \in L^1$. Voir 5.2 pour une démonstration dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^+$ muni de la mesure de Lebesgue.

Voici un exemple d'utilisation du théorème précédent. Remarquons d'abord que si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est lipschitzienne, avec $||F||_{\mathrm{Lip}} \leq ||f||_\infty$. Il se trouve que ce résultat évident possède une réciproque :

Proposition 5.1.7 *Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne, alors il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Preuve abrégée. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne, et notons C la constante de Lipschitz de F. Pour $h > 0$, posons

$$F_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,.$$

Par hypothèse, toutes les fonction F_h sont bornées, avec $||F_h||_\infty \leq C$ pour tout $h > 0$. De plus, en écrivant $\int_{\mathbb{R}} \varphi F_h = \int_{\mathbb{R}} F(x)\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\,dx$ et en utilisant le théorème de convergence dominée, on constate que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact, alors

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi F_h = -\int_{\mathbb{R}} \varphi' F\,.$$

Comme $|\int_{\mathbb{R}} \varphi F_h| \leq ||F_h||_\infty\, ||\varphi||_1 \leq C\, ||\varphi||_1$, on obtient donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}) \qquad \left| -\int_{\mathbb{R}} F\varphi' \right| \leq C\, ||\varphi||_1\,.$$

Autrement dit, l'application linéaire $L : \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$ définie par $L(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} F\varphi'$ est continue sur $(\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}), ||\ .\ ||_1)$. Comme $\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, le théorème de prolongement par densité permet d'étendre L en une forme linéaire continue $\tilde{L} \in L^1(\mathbb{R})^* \simeq L^\infty(\mathbb{R})$. Il existe donc une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} f\varphi = -\int_{\mathbb{R}} F\varphi'\,.$$

En posant $G(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, en écrivant $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi'(t)\, dt$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient la formule d'intégration parties $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = -\int_{\mathbb{R}} G\varphi'$ (c'est un bon exercice). Par conséquent, on a $\int_{\mathbb{R}} F\varphi' = \int_{\mathbb{R}} G\varphi'$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$. Comme F et G sont continues, on peut en déduire (un autre bon exercice) que la fonction $F - G$ est constante, d'où le résultat souhaité. □

5.1.3 dual de $\mathcal{C}(K)$

Définition 5.1.8 *Soit K un espace métrique compact, et soit* $\mathrm{Bor}(K)$ *sa tribu borélienne.*
(1) *On appellera* **mesure réelle sur** *K toute application $\mu : \mathrm{Bor}(K) \to \mathbb{R}$ de la forme $\mu = \nu_1 - \nu_2$, où ν_1 et ν_2 sont des mesures boréliennes positives* finies.
(2) *On appellera* **mesure complexe** *sur K toute application $\mu : \mathrm{Bor}(K) \to \mathbb{C}$ de la forme $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont des mesures réelles.*

Exemple *Soit ν une mesure borélienne positive sur K. Si $f : K \to \mathbb{C}$ est une fonction borélienne ν-intégrable, alors l'application $\mu_f : \mathrm{Bor}(K) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\nu$$

est une mesure complexe sur K. Si f est à valeurs réelles, alors μ_f est une mesure réelle.

Preuve. Si f est une fonction positive, alors il est bien connu que μ_f est une mesure positive, finie car f est ν-intégrable. Dans le cas général, on écrit $f = f_1 + if_2$, où f_1, f_2 sont des fonctions réelles, puis $f_i = f_i^+ - f_i^-$, où $f_i^+ = \max(f_i, 0)$ et $f_i^- = -\min(f_i, 0)$, et on obtient une décomposition convenable pour μ_f. □

On peut en fait montrer que *toute* mesure complexe sur K est du type précédent. Mais la preuve est loin d'être immédiate, et on n'aura pas besoin de ce résultat.

Si $\mu = \nu_1 - \nu_2$ est une mesure réelle, alors les mesures ν_1 et ν_2 telles que $\mu = \nu_1 - \nu_2$ ne sont pas déterminées de manière unique par μ. On a cependant le résultat suivant.

Remarque *Soit μ une mesure réelle sur K. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée, alors le nombre $\int_K f\, d\nu_1 - \int_K f\, d\nu_2$ dépend uniquement de μ et non de la décomposition de μ sous la forme $\mu = \nu_1 - \nu_2$, où les ν_i sont des mesures positives.*

Preuve. Si $\mu = \nu_1 - \nu_2 = \nu_1' - \nu_2'$, alors les deux mesures positives $\nu_{12} = \nu_1 + \nu_2'$ et $\nu_{21} = \nu_1' + \nu_2$ sont égales. On a donc $\int_K f\, d\nu_{12} = \int_K f\, d\nu_{21}$, d'où le résultat. $\square$

La remarque précédente permet de définir sans ambiguité l'intégrale $\int_K f\, d\mu$ lorsque μ est une mesure réelle et f est une fonction borélienne bornée sur K. On peut alors définir l'intégrale de f par rapport à une mesure complexe $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ en posant

$$\int_K f\, d\mu = \int_K f\, d\mu_1 + i \int_K f\, d\mu_2 \,.$$

Il n'y a cette fois aucune ambiguité a priori, car μ_1 et μ_2 sont uniquement déterminées par μ : μ_1 est la partie réelle de μ et μ_2 est sa partie imaginaire.

Dans la suite, K est un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues $f : K \to \mathbb{K}$, muni de la norme $||\ .\ ||_\infty$, et on appellera *mesure scalaire* sur K une mesure réelle ou complexe, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lemme 5.1.9 *Si μ est une mesure scalaire sur K, alors l'application $f \mapsto \int_K f\, d\mu$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(K)$.*

Preuve. Par définition d'une mesure scalaire, il suffit de traiter le cas d'une mesure positive finie ν ; et dans ce cas le résultat est évident puisque $\left|\int_K f\, d\nu\right| \leq \nu(K) \times \|f\|_\infty$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$. $\square$

Le résultat suivant, qu'il n'est pas question de démontrer ici, décrit complètement les formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(K)$. C'est ce théorème qui fait le pont entre l'approche "ensembliste" et l'approche "fonctionnelle" de la théorie de l'intégration.

Théorème 5.1.10 (théorème de représentation de Riesz)
Si Φ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(K)$, alors il existe une unique mesure scalaire μ telle que

$$\Phi(f) = \int_K f\, d\mu$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$.

5.2 Théorème de Hahn-Banach

5.2.1 Fonctionnelles sous-linéaires

Définition 5.2.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une* **fonctionnelle sous-linéaire** *sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.*
(1) *$p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geq 0$; en particulier, $p(0) = 0$.*
(2) *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in E$.*

Exemple 0 *Une forme linéaire est une fonctionnelle sous-linéaire.*

Exemple 1 *Une norme est une fonctionnelle sous-linéaire.*

Exemple 2 *Soit E un espace vectoriel normé, et soit $C \subseteq E$ une partie convexe de E telle que $0 \in \mathring{C}$. On définit une fonctionnelle sous-linéaire $p_C : E \to \mathbb{R}^+$ en posant*

$$p_C(x) = \inf \left\{ \alpha > 0;\ \frac{x}{\alpha} \in C \right\}.$$

On dit que p_C est la **jauge** *du convexe C, ou encore la* **fonctionnelle de Minkowski** *de C.*

Preuve. Comme $0 \in \mathring{C}$, tout point $x \in E$ est "absorbé" par le convexe C : si on choisit $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subseteq C$, alors $\frac{r}{||x||}\, x \in C$. Par conséquent, l'ensemble $\{\alpha > 0;\ x/\alpha \in C\}$ est non vide, donc $p_C(x)$ est bien défini pour tout $x \in E$. Il est facile de voir que $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$ pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda > 0$. On a de plus $p(0) = 0$ car $\frac{0}{\alpha} \in C$ pour tout $\alpha > 0$. Ainsi, la propriété (1) est vérifiée.
Soient $x, y \in E$, et soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\frac{x}{\alpha} \in C$ et $\frac{y}{\beta} \in C$. En écrivant

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{\beta} = \lambda\,\frac{x}{\alpha} + (1-\lambda)\,\frac{y}{\beta},$$

on voit que $\frac{x+y}{\alpha+\beta}$ est combinaison convexe de deux éléments de C, et par conséquent $\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C$. Par définition de p_C, on en déduit

$$p_C(x+y) \leq \alpha + \beta,$$

pour tout couple (α, β) tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$ et $\frac{y}{\beta} \in C$. En passant indépendemment à la borne supérieure en α et en β, on obtient donc $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$. Ainsi, la propriété (2) est vérifiée, ce qui termine la démonstration. $\square$

Remarquons que les jauges sont une généralisation des normes : si $(E, \|\ .\ \|)$ est un espace vectoriel normé et si on note B la boule unité de E, alors $p_B = ||\ .\ ||$.

5.2.2 Énoncé du théorème

Théorème 5.2.2 (Hahn-Banach)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit $p : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire. Soit également V un sous-espace vectoriel de E, et soit $\Phi : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire majorée par p, c'est-à-dire vérifiant $\Phi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in V$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\Phi} : E \to \mathbb{R}$ définie sur E tout entier, qui prolonge Φ et reste majorée par p.

Corollaire 5.2.3 (Hahn-Banach)
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit également V un sous-espace vectoriel de E, et soit $\Phi : V \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une forme linéaire continue $\tilde{\Phi} : E \to \mathbb{K}$ telle que $\tilde{\Phi}_{|V} = \Phi$ et $||\tilde{\Phi}|| = ||\Phi||$.

Preuve du corollaire. On doit distinguer le cas réel du cas complexe.

Cas 1 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Posons $C = ||\Phi||$. En appliquant le théorème avec $p = C\,||\ .\ ||$, on obtient une forme linéaire $\tilde{\Phi} : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge Φ et vérifie $\tilde{\Phi}(x) \leq C\,||x||$ pour tout $x \in E$. On a alors aussi $-\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(-x) \leq C\,||-x|| = C\,||x||$, d'où $|\tilde{\Phi}(x)| \leq C\,||x||$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, $\tilde{\Phi}$ est continue et $||\tilde{\Phi}|| \leq C = ||\Phi||$. Mais comme $\tilde{\Phi}$ prolonge Φ, on a aussi $||\tilde{\Phi}|| \geq ||\Phi||$, d'où $||\tilde{\Phi}|| = ||\Phi||$. □

Cas 2 : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Posons $\Phi_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(\Phi)$. Alors $\Phi_{\mathbb{R}} : V \to \mathbb{R}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue, et on a $||\Phi_{\mathbb{R}}|| \leq ||\Phi||$ car $|\Phi_{\mathbb{R}}(x)| \leq |\Phi(x)|$ pour tout $x \in V$. D'après le cas 1, il existe donc une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $\tilde{\Phi}_{\mathbb{R}} : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge $\Phi_{\mathbb{R}}$ et vérifie $||\tilde{\Phi}_{\mathbb{R}}|| \leq ||\Phi||$. On définit alors $\tilde{\Phi} : E \to \mathbb{C}$ par

$$\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}_{\mathbb{R}}(x) - i\tilde{\Phi}_{\mathbb{R}}(ix)\,.$$

Il est clair que $\tilde{\Phi}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue. De plus, on a $\tilde{\Phi}(ix) = \Phi_{\mathbb{R}}(ix) - i\Phi_{\mathbb{R}}(-x) = i\tilde{\Phi}(x)$ pour tout $x \in E$, donc $\tilde{\Phi}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Enfin, si $x \in V$, alors

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x) &= \Phi_{\mathbb{R}}(x) - i\Phi_{\mathbb{R}}(ix) \\ &= \mathrm{Re}(\Phi(x)) - i\mathrm{Re}(\Phi(ix)) \\ &= \mathrm{Re}(\Phi(x)) - i\mathrm{Re}(i\Phi(x)), \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la $\mathbb{C}$-linéarité de Φ. Comme $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ pour tout nombre complexe z, on obtient donc $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x)$ pour tout $x \in V$; autrement dit, $\tilde{\Phi}$ prolonge Φ.
Il reste à voir qu'on a $||\tilde{\Phi}|| = ||\Phi||$. Si $x \in E$, alors il existe un nombre complexe λ tel que $|\lambda| = 1$ et $|\tilde{\Phi}(x)| = \lambda\tilde{\Phi}(x)$. On a alors $|\tilde{\Phi}(x)| = \tilde{\Phi}(\lambda x) = \mathrm{Re}(\tilde{\Phi}(\lambda x))$ puisque $|\tilde{\Phi}(x)| \in \mathbb{R}$; autrement dit $|\tilde{\Phi}(x)| = \tilde{\Phi}_{\mathbb{R}}(\lambda x)$. On en déduit $|\tilde{\Phi}(x)| \leq ||\tilde{\Phi}_{\mathbb{R}}||\,||x|| \leq ||\Phi||\,||x||$ pour tout $x \in E$, d'où $||\tilde{\Phi}|| \leq ||\Phi||$. L'inégalité inverse est évidente puisque $\tilde{\Phi}$ prolonge Φ.

5.2.3 Preuve du théorème

Dans toute la suite, la fonctionnelle sous-linéaire $p : E \to \mathbb{R}$ et la forme linéaire $\Phi : V \to \mathbb{R}$ sont fixées. On dira qu'une forme linéaire $\Psi : W \to \mathbb{R}$ définie sur un sous-espace vectoriel $W \subseteq E$ est un *prolongement admissible de* Φ si Ψ prolonge Φ (autrement dit $W \supseteq V$ et $\Psi_{|W} = \Phi$) et si on a $\Psi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in W$.

Par hypothèse, Φ elle-même est un prolongement admissible de Φ. Le théorème de Hahn-Banach affirme très exactement l'existence d'un prolongement admissible de Φ défini sur E tout entier.

1 Début de la preuve

Le lemme suivant est le point clé de la preuve du théorème de Hahn-Banach.

Lemme 5.2.4 *Soit $\Psi : W \to \mathbb{R}$ un prolongement admissible de Φ. Si $e \in E$ et $e \notin W$, il existe une forme linéaire $\tilde{\Psi} : W \oplus \mathbb{R}e \to \mathbb{R}$ qui prolonge Ψ et est encore un prolongement admissible de Φ.*

Preuve. Si $\tilde{\Psi}$ est une forme linéaire sur $W \oplus \mathbb{R}e$ prolongeant Ψ, alors, pour $x = w + \lambda e \in W \oplus \mathbb{R}e$, on a

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(w) + \lambda\alpha\,,$$

où $\alpha = \tilde{\Psi}(e)$. Il s'agit donc de prouver qu'il existe un nombre réel α tel que

$$\Psi(w) + \alpha\lambda \leq p(w + \lambda e)$$

pour tout couple $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{R}$. L'inégalité est vérifiée pour $\lambda = 0$, car elle se réduit à $\Psi(w) \leq p(w)$, $w \in W$. On cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \lambda > 0 \;\; \forall w \in W \qquad \Psi(w) \pm \alpha\lambda \leq p(w \pm \lambda e)\,,$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall (\lambda, w) \in]0; \infty[\times W \qquad \Psi\left(\frac{w}{\lambda}\right) - p\left(\frac{w}{\lambda} - e\right) \leq \alpha \leq p\left(\frac{w}{\lambda} + e\right) - \Psi\left(\frac{w}{\lambda}\right)\,.$$

Pour montrer l'existence d'un nombre α vérifiant cette propriété, il suffit visiblement de prouver qu'on a

$$\sup\{\Psi(u) - p(u - e);\ u \in W\} \leq \inf\{p(v + e) - \Psi(v);\ v \in W\}\,.$$

Mais cette dernière inégalité est bel et bien vérifiée, car pour $(u, v) \in W \times W$, on a

$$\Psi(u) + \Psi(v) \leq p(u + v) \leq p(u - e) + p(v + e)\,,$$

et donc $\Psi(u) - p(u - e) \leq \Psi(v) - \Psi(v + e)$. Cela termine la preuve du lemme. $\square$

2 Interlude : lemme de Zorn

Le lemme de Zorn est une des formes équivalentes de l'axiome du choix. Il va intervenir de façon essentielle dans la preuve du théorème de Hahn-Banach.

Rappelons qu'une **relation d'ordre** sur un ensemble $\mathcal{E}$ est une relation binaire sur $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes :
(1) $x \preceq x$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ (*réflexivité*)
(2) Si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors $x = y$ (*antisymétrie*)
(3) Si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors $x \preceq z$ (*transitivité*)

Définition 5.2.5 *Soit $(\mathcal{E}, \preceq)$ un ensemble ordonné.*
(1) *On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ est* **totalement ordonnée** *par $\preceq$ si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont comparables pour $\preceq$, autrement dit, si pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.*
(2) *On dit que l'ordre $\preceq$ est* **inductif** *si toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ possède un majorant dans $\mathcal{E}$; autrement dit, si pour toute partie totalement ordonnée $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$, il existe un point $z \in \mathcal{E}$ tel que $a \preceq z$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.*
(3) *On dit qu'un point $z \in \mathcal{E}$ est un élément* **maximal** *de $\mathcal{E}$ s'il n'existe aucun point $x \in \mathcal{E}$ tel que $z \preceq x$ et $x \neq z$.*

Les exemples suivant permettront peut-être de clarifier ces définitions.

Exemple 1 Soit Ω un ensemble contenant au moins 2 points, et soit $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble de toutes les parties de Ω. On ordonne $\mathcal{E}$ par inclusion :

$$A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B\,.$$

Alors $\mathcal{E}$ n'est pas totalement ordonné, mais il possède un plus grand élément, à savoir Ω. De ce fait, $\mathcal{E}$ possède un unique élément maximal, et l'ordre $\preceq$ est inductif.

Exemple 2 Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}$, ordonné par inclusion. Alors $\mathcal{E}$ n'est pas totalement ordonnée, il ne possède aucun élément maximal, et l'ordre $\preceq$ n'est pas inductif.

Exemple 3 Soit E un espace métrique contenant au moins 2 points, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des compacts *non vides* de E. On ordonne $\mathcal{E}$ par inclusion inverse :

$$K \preceq L \Leftrightarrow K \supseteq L\,.$$

Alors $\mathcal{E}$ n'est pas totalement ordonné, l'ordre $\preceq$ est inductif, et les éléments maximaux sont les singletons.

Voici maintenant l'énoncé du lemme de Zorn.

Lemme de Zorn *Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.*

Le lemme de Zorn intervient dans toutes les mathématiques. Une de ses particularités agréables est qu'il est toujours très facile à utiliser. En voici trois applications, qu'on ne détaillera pas.

Exemple 1 *Tout espace vectoriel possède une base.*

Pour la preuve, on prend pour $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les familles libres de l'espace vectoriel considéré, et on ordonne $\mathcal{E}$ par inclusion : $(e_i)_{i\in I} \preceq (f_j)_{j\in J}$ si et seulement si $\{e_i;\ i\in I\} \subseteq \{f_j;\ j\in J\}$. On vérifie sans difficulté que l'ordre est inductif, et qu'une famille libre maximale est nécessairement une base. $\square$

Exemple 2 *Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne.*

La preuve est identique, en prenant pour $\mathcal{E}$ l'ensemble des familles orthonormales de l'espace de Hilbert considéré. $\square$

Exemple 3 *Dans un anneau commutatif, tout idéal est contenu dans un idéal maximal.*

Pour la preuve, on prend pour $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les idéaux de l'anneau considéré contenant l'idéal donné et ne contenant pas l'élément unité, et on ordonne à nouveau $\mathcal{E}$ par inclusion. $\square$

3 Fin de la preuve

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les prolongements admissibles de Φ. On ordonne $\mathcal{E}$ de la manière suivante : si $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{E}$, alors

$$\Psi_1 \preceq \Psi_2 \Leftrightarrow \Psi_2 \text{ est un prolongement de } \Psi_1\,.$$

On vérifie sans difficulté que l'ordre $\mathcal{E}$ est inductif : si $(\Psi_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée de prolongements admissibles, $\Psi_i : W_i \to \mathbb{R}$, alors $W := \bigcup_i W_i$ est un sous-espace vectoriel de E, et on définit $\Psi : W \to \mathbb{R}$ sans ambiguité en posant $\Psi(x) = \Psi_i(x)$ si $x \in W_i$; par définition, Ψ est un prolongement admissible de Φ qui majore toutes les Ψ_i. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ possède donc un élément maximal $\Psi_0 : W_0 \to \mathbb{R}$. Si on avait $W_0 \neq E$, alors le lemme 5.2.4 fournirait un prolongement admissible $\tilde{\Psi}_0$ strictement supérieur à Ψ_0 au sens de l'ordre $\preceq$, ce qui contredirait la maximalité de Ψ_0. Par conséquent, $W_0 = E$. On a donc trouvé un prolongement admissible de Φ défini sur E tout entier, ce qui termine la démonstration du théorème de Hahn-Banach. □

Exemple 1 (projections)
Soit X un espace vectoriel normé. Si $E \subset X$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie*, alors il existe une projection linéaire continue de X sur E.*

Preuve. Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de E, et soit $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ la base duale dans E^* ; les e_i^* sont continues car E est de dimension finie. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger chaque e_i^* en une forme linéaire continue $\lambda_i \in X^*$. On définit alors une projection linéaire continue de X sur E en posant

$$p(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(x) e_i \,.$$

□

Exemple 2 $L^1(\mathbb{R}^+)$ *n'est pas le dual de* $L^\infty(\mathbb{R}^+)$.

On a vu que toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ définit une forme linéaire continue Φ_g sur $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ par la formule

$$\Phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^+} fg \,.$$

On va montrer ici qu'on n'obtient *pas* ainsi toutes les formes linéaires continues sur $L^\infty(\mathbb{R}^+)$.
Soit $V \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^+)$ le sous-espace vectoriel constitué par les fonctions continues $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$. On définit une forme linéaire $\Phi : V \to \mathbb{K}$ en posant $\Phi(f) = \lim_{x\to\infty} f(x)$, et cette forme linéaire est continue sur $(V, ||\ .\ ||_\infty)$ car $|\Phi(f)| \leq ||f||_\infty$ pour toute $f \in V$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire continue $\tilde{\Phi} : L^\infty(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall f \in V \qquad \tilde{\Phi}(f) = \lim_{x\to\infty} f(x) \,.$$

Supposons qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que $\tilde{\Phi} = \Phi_g$. Par définition de $\tilde{\Phi}$, on doit donc avoir $\int_{\mathbb{R}^+} fg = 0$ pour toute fonction f continue à support compact. Cela entraîne qu'on a $g = 0$ presque partout. En effet, si tel n'est pas le cas, alors, quitte à changer g en $-g$, on peut supposer qu'il existe un borélien $A \subseteq \mathbb{R}$ de mesure strictement positive tel que $g > 0$ sur A. Par régularité de la mesure de Lebesgue, A contient un compact K de mesure strictement positive, et on a donc $\int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{1}_K g > 0$. Mais la fonction $\mathbf{1}_K$ est limite simple d'une suite de fonctions continues à support compact (f_n) vérifiant de plus $||f_n||_\infty \leq 1$ pour tout n. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc $\int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{1}_K g = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n g = 0$, d'où une contradiction.

5.3 Conséquences du théorème de Hahn-Banach

5.3.1 Le dual sépare les points

Proposition 5.3.1 *Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout point $x \in E$, il existe une forme linéaire continue $x^* \in E^*$ telle que $||x^*|| = 1$ et $\langle x^*, x\rangle = ||x||$.*

Preuve. On applique le théorème de Hahn-Banach avec $V = \mathbb{K}x$ et $\Phi : V \to \mathbb{K}$ définie par $\Phi(\lambda x) = \lambda\, ||x||$. □

Corollaire 5.3.2 *si E est un espace vectoriel normé, alors E^* sépare les points de E : si $a, b \in E$ et $a \neq b$, alors il existe $x^* \in E^*$ telle que $\langle x^*, a\rangle \neq \langle x^*, b\rangle$*

Preuve. On applique la proposition à $x = b - a$. □

Corollaire 5.3.3 *Pour tout $x \in E$, on a*

$$||x|| = \sup\{|\langle x^*, x\rangle|;\ x^* \in E^*,\ ||x^*|| \leq 1\}\,.$$

Ce dernier résultat peut s'interprèter de la manière suivante. Tout point $x \in E$, peut être considéré comme une forme linéaire sur E^* ; de façon formelle, à $x \in E$, on peut associer la forme linéaire $i_E(x) : E^* \to \mathbb{K}$ définie par

$$\langle i_E(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle\,.$$

Par définition de la norme de E^*, la forme linéaire $i_E(x)$ est continue, et $||i_E(x)|| \leq \|x\|$. Le résultat précédent affirme qu'on a en fait $||i_E(x)|| = ||x||$. En résumé :

Corollaire 5.3.4 *L'application $i_E : E \to E^{**}$ définie par les identités $\langle i_E(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$ est un plongement (linéaire) isométrique de l'espace vectoriel normé E dans son* **bidual** *E^{**}. On dit que i_E est le* **plongement canonique** *de E dans E^{**}.*

Un espace de Banach est dit *réflexif* si le plongement canonique $i : E \to E^{**}$ est surjectif, autrement dit si "le dual de E^{**} est E". Grâce à la description des formes linéaires continues sur un espace de Hilbert ou un un espace L^p, on montre sans difficulté que tout espace de Hilbert est réflexif, de même que tout espace L^p pour $1 < p < \infty$. En revanche, l'exemple donné à la fin de la section précédente montre que $L^1(\mathbb{R}^+)$ n'est pas réflexif. Plus simplement, c_0 n'est pas réflexif car "le dual de c_0 est ℓ^1" et "le dual de ℓ^1 est ℓ^∞".

5.3.2 Critère de densité

Le résultat suivant généralise 5.3.2.

Proposition 5.3.5 *Soit E un espace vectoriel normé, et soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Pour tout point $a \notin F$, il existe une forme linéaire continue $x^* \in E^*$ telle que $\langle x^*, a\rangle \neq 0$ et $x^* \equiv 0$ sur F.*

Preuve. Soit $a \in E \setminus F$, et posons $V = F \oplus \mathbb{K}a$. On définit une forme linéaire $\Phi : V \to \mathbb{K}$ en posant $\Phi(a) = 1$ et $\Phi(x) = 0$ pour $x \in F$. La forme linéaire Φ est *continue*, car $\mathrm{Ker}(\Phi) = F$ et F est fermé dans E, donc dans V (voir 4.1.4). Le théorème de Hahn-Banach permet donc de prolonger Φ en une forme linéaire continue $\tilde{\Phi} = x^* \in E^*$ qui répond à la question. □

Variante. On applique 5.3.2 dans l'espace vectoriel normé quotient E/F, ce qui donne une forme linéaire continue $\Phi \in (E/F)^*$ telle que $\Phi([a]) \neq 0$, où $[a]$ est la classe de a dans E/F. Il suffit alors de poser $x^* = \Phi \circ \pi$, où $\pi : E \to E/F$ est l'application quotient canonique. □

La proposition précédente permet de donner un très utile critère de densité pour un sous-espace vectoriel de E. Introduisons d'abord deux notations. Pour $A \subseteq E$, on pose

$$A^\perp = \{x^* \in E^*;\ \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in A\},$$

et pour $B \subseteq E^*$, on pose de même

$$B_\perp = \{x \in E;\ \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ pour tout } x^* \in B\}.$$

Corollaire 5.3.6 (critère de densité)
Soit E un espace vectoriel normé. Si V est un sous-espace vectoriel de E, alors $(V^\perp)_\perp = \overline{V}$. En particulier, V est dense dans E si et seulement si $V^\perp = \{0\}$.

Preuve. Il est clair qu'on a $V \subseteq (V^\perp)_\perp$, et donc $\overline{V} \subseteq (V^\perp)_\perp$ car $B_\perp$ est une partie fermée de E pour tout $B \subseteq E^*$ (exercice facile). Inversement, si $a \notin \overline{V}$, alors la proposition précédente appliquée à $F = \overline{V}$ affirme très exactement que $a \notin (\overline{V}^\perp)_\perp = (V^\perp)_\perp$. □

L'exemple qui suit illustre le critère de densité.

Exemple *Pour $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| > 1$, notons $f_a : [-1;1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par*

$$f_a(t) = \frac{1}{a-t}.$$

Si (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $|a_n| > 1$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, alors l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_{a_n} est dense dans $\mathcal{C}([-1;1])$.

Preuve. D'après le critère de densité, il suffit de montrer que si μ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([-1;1])$ vérifiant $\langle \mu, f_{a_n}\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu = 0$. Fixons μ.
Si $a \in \mathbb{C}$ et $|a| > 1$, on peut écrire

$$f_a(t) = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{t}{a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{a^{k+1}},$$

où la série converge normalement sur $[-1;1]$, donc au sens de la norme $\|\ .\ \|_\infty$. Comme μ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([-1;1])$, on en déduit

$$\langle \mu, f_a\rangle = \sum_0^{\infty} c_n \times \left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} = \varphi\left(\frac{1}{a}\right),$$

où $c_k = \langle \mu, t^n \rangle$ et $\varphi(z) = \sum_0^\infty c_k z^{k+1}$; on a noté t^k la fonction $t \mapsto t^k$. Comme la suite (c_k) est bornée ($|c_k| \leq ||\mu||\, ||t^k||_\infty = ||\mu||$), la fonction φ est holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. De plus, on a $\varphi\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par hypothèse sur μ. D'après le principe des zéros isolés, on a donc $\varphi = 0$, d'où $c_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $c_k = \langle \mu, t^k \rangle$, on a donc $\langle \mu, P \rangle = 0$ pour toute fonction polynomiale P, d'où $\mu = 0$ car les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}([-1;1])$. $\square$

5.3.3 Séparation des ensembles convexes

Si on dessine deux ensembles convexes A et B dans le plan qui ne se rencontrent pas, on "voit bien" qu'il est possible de tracer une droite D telle que A et B sont situés de part et d'autre de D. Ce résultat n'est pas seulement vrai dans le plan. De façon précise, on a le résultat suivant, qui est la forme "géométrique" du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 5.3.7 (théorème de séparation des convexes)
Soit E un espace vectoriel normé réel, et soient A, B deux parties convexes de E. On suppose que A est compact, que B est fermé, et qu'on a $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe une forme linéaire continue $x^* \in E^*$ telle que

$$\inf\{\langle x^*, u\rangle;\ u \in A\} > \sup\{\langle x^*, v;\ v \in B\}\,.$$

Autrement dit, on peut trouver $x^* \in E^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle x^*, u\rangle \geq \beta > \alpha \geq \langle x^*, v\rangle$$

pour tous $u \in A$, $v \in B$.

Ce théorème a une interprétation géométrique très claire : si $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $\sup_B x^* < \lambda < \inf_A x^*$, alors A et B sont situés "de part et d'autre" de l'hyperplan fermé

$$H_\lambda = \{x;\ \langle x^*, x\rangle = \lambda\}\,.$$

Autrement dit, H_λ "sépare" les deux convexes A et B, d'où le nom du théorème.

Preuve du théorème. On distingue deux cas.

Cas 1 *A est réduit à 1 point* $\{a\}$. On cherche alors $x^* \in E^*$ telle que $\langle x^*, a\rangle > \sup\{\langle x^*, x\rangle;\ x \in B\}$. Par translation, on peut supposer $0 \in B$. Comme $a \notin B$ et B est fermé, on a $d(a, B) > 0$. Soit $r > 0$ tel que $d(a, B) > r$, et posons

$$C = \{x \in E;\ d(x, B) \leq r\}\,.$$

On vérifie sans difficulté que C est convexe, et C est de plus fermé car la fonction $x \mapsto d(x, B)$ est continue. Comme $0 \in B$, C contient la boule fermée $\overline{B}(0, r)$, donc $0 \in \mathring{C}$. Soit p_C la fonctionnelle de Minkowski de C,

$$p_C(x) = \inf\left\{\alpha > 0;\ \frac{x}{\alpha} \in C\right\}\,.$$

On sait que p_C est une fonctionnelle sous-linéaire. On a $p_C(x) \leq 1$ pour tout $x \in C$, mais en revanche $p_C(a) > 1$. En effet, on peut trouver une suite (α_n) tendant vers $p_C(a)$ telle que $\frac{a}{\alpha_n} \in C$ pour tout n. Comme C est fermé, on en déduit $\frac{a}{p_C(a)} \in C$, autrement dit $a \in p_C(a)C$. Si on avait

$p_C(a) \leq 1$, on en déduirait $a \in C$ car C est convexe et contient 0, d'où une contradiction.
Soit $\Phi : \mathbb{R}a \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Phi(a) = p_C(a)$. Si $x = \lambda a \in \mathbb{R}a$, on a $\Phi(x) = \lambda p_C(a)$, donc $\Phi(x) \leq 0 \leq p_C(x)$ si $\lambda \leq 0$ et $\Phi(x) = p_C(\lambda a) = p_C(x)$ si $\lambda \geq 0$; la forme linéaire Φ est donc majorée par p_C. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut trouver une forme linéaire $\tilde{\Phi} : E \to \mathbb{R}$ prolongeant Φ et majorée par p_C. On a alors $\tilde{\Phi}(a) = p_C(a) > 1$, et $\tilde{\Phi}(x) \leq p_C(x) \leq 1$ si $x \in B \subseteq C$. Enfin, $|\tilde{\Phi}(x)| = \tilde{\Phi}(\pm x) \leq 1$ pour tout $x \in \overline{B}(0, r)$, donc $\tilde{\Phi}$ est continue et $||\tilde{\Phi}|| \leq 1/r$. Ainsi, $x^* = \tilde{\Phi}$ convient.

Cas général. On applique le premier cas à $\tilde{A} = \{0\}$ et

$$\tilde{B} = A - B = \{x - y;\ (x, y) \in A \times B\}.$$

L'ensemble $\tilde{B}$ est visiblement convexe. Comme A est compact et B fermé, c'est un exercice sans difficulté notable de montrer que $\tilde{B}$ est également fermé dans E. Enfin, on a $0 \notin \tilde{B}$ puisque $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Voici une conséquence immédiate du théorème de séparation des convexes.

Corollaire 5.3.8 *Soit X un espace vectoriel normé réel, et soit C un convexe fermé de X.*
(1) *Si $a \in X$ et $a \notin C$, alors on peut trouver $x^* \in X^*$ telle que $\langle x^*, a\rangle > \sup\{\langle x^*, z\rangle;\ z \in C\}$.*
(2) *Si $C \neq X$, alors C est une intersection de demi-espaces fermés.*

Preuve. La partie (1) découle du théorème de séparation des convexes appliqué à $A = \{a\}$ et $B = C$. On en déduit que pour tout point $a \in X \setminus C$, on peut trouver un demi-espace fermé H tel que $C \subseteq H$ et $a \notin H$. Par conséquent, C est l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui le contiennent, ce qui prouve (2). $\square$

De la preuve du théorème de séparation des convexes, on tire également un autre résultat du même type.

Corollaire 5.3.9 *Soit Z un espace vectoriel normé réel, et soit Ω un* ouvert *convexe de Z. Si a est un point de Z et $a \notin \Omega$, alors il existe une forme linéaire continue non nulle $z^* \in Z^*$ telle que $\langle z^*, a\rangle \geq \sup\{\langle z^*, z\rangle;\ z \in \Omega\}$.*

Preuve. Par translation, on peut supposer $0 \in \Omega$. On reprend alors le raisonnement de l'étape 1 dans la preuve du théorème de séparation des convexes, en considérant la fonctionnelle sous-linéaire p_Ω. Cela donne une forme linéaire continue z^* telle que $\langle z^*, a\rangle = p_\Omega(a)$ et $z^* \leq p_\Omega$. Comme $a \notin \Omega$, on a $p_\Omega(a) \geq 1$, tandis que $p_\Omega(z) \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$. Par conséquent, z^* convient. $\square$

Exemple 1 *Convexes et intégrales*

Comme illustration de 5.3.8, on va démontrer le résultat suivant, mentionné au chapitre 4 (voir la remarque suivant 4.4.3).

Lemme 5.3.10 *Soient K un espace métrique compact, et μ une mesure de probabilité borélienne sur K. Soient également X un espace de Banach, et C une partie convexe fermée de X. Si $\varphi : K \to X$ est une fonction continue prenant ses valeurs dans C, alors $\int_K \varphi\, d\mu \in C$.*

Preuve. D'après 5.3.8, il suffit de prouver le résultat lorsque C est un demi-espace fermé, c'est-à-dire un ensemble du type $\{x;\ \langle x^*, x\rangle \geq \alpha\}$, où $x^* \in X^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais dans ce cas, il suffit d'écrire

$$\left\langle x^*, \int_K \varphi\, d\mu \right\rangle = \int_K \langle x^*, \varphi(t)\rangle\, d\mu(t) \geq \alpha \int_K d\mu = \alpha\,.$$

Exemple 2 *Hyperplan d'appui au graphe d'une fonction convexe*

Comme application de 5.3.9, on va maintenant démontrer le résultat suivant, qui signifie que le graphe d'une fonction convexe continue possède en tout point un "hyperplan d'appui".

Proposition 5.3.11 *Soit E un espace vectoriel normé réel, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Pour tout point $x_0 \in E$, il existe une fonction affine continue $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x_0) = f(x_0)$ et $\varphi(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$.*

Preuve. Fixons $x_0 \in E$, et posons

$$\Omega = \{(x,\lambda) \in E \times \mathbb{R};\ \lambda > f(x)\}\,.$$

Comme f est convexe continue, Ω est un ouvert convexe de $Z = E \times \mathbb{R}$. De plus, le point $a = (x_0, f(x_0))$ n'appartient pas à Ω. D'après 5.3.9, on peut donc trouver une forme linéaire continue non nulle $\Phi : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi(a) \geq \Phi(z)$ pour tout $z \in \Omega$. La forme linéaire Φ est donnée par

$$\Phi(x,\lambda) = \langle x^*, x\rangle + c\lambda\,,$$

où $x^* \in E^*$ et c est une constante. Par définition de Φ, on a ainsi

$$(*) \qquad \langle x^*, x_0\rangle + cf(x_0) \geq \langle x^*, x\rangle + c\lambda$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda > f(x)$. Si on avait $c = 0$, on en déduirait $\langle x^*, x_0\rangle \geq \langle x^*, x\rangle$ pour tout $x \in E$, d'où $x^* = 0$, ce qui est exclu puisque $\Phi \neq 0$. Si on avait $c > 0$, alors $(*)$ conduirait à une contradiction en faisant tendre λ vers $+\infty$. On a donc $c < 0$, et quitte à diviser par $-c$, on peut supposer $c = -1$. Ainsi, on a $\langle x^*, x_0\rangle - f(x_0) \geq \langle x^*, x\rangle - \lambda$ pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda > f(x)$. En fixant x et en faisant tendre λ vers $f(x)$, on en déduit

$$\langle x^*, x_0\rangle - f(x_0) \geq \langle x^*, x\rangle - f(x)$$

pour tout $x \in E$. Par conséquent, il suffit de poser $\varphi(x) = f(x_0) + \langle x^*, x - x_0\rangle$. □

Corollaire 5.3.12 *Soit E un espace vectoriel normé réel. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors f est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues : il existe une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions affines continues telle que $f = \sup_i \varphi_i$.*

Preuve. Il suffit de prendre pour (φ_i) la famille de toutes les fonctions affines continues majorées par f, et d'appliquer la proposition. □

Voici pour finir la version complexe du théorème de séparation des convexes.

Remarque 5.3.13 *Si A et B sont comme dans le théorème de séparation des convexes, et si E est cette fois un espace vectoriel normé* complexe, *alors on peut trouver une forme linéaire continue $x^* \in E^*$ telle que*

$$\inf\{\mathrm{Re}\,\langle x^*, u\rangle;\ u \in A\} > \sup\{\mathrm{Re}\,\langle x^*, v\rangle;\ v \in B\}\,.$$

Preuve. Le théorème de séparation des convexes fournit une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $\Phi : E \to \mathbb{R}$ séparant A et B. Il suffit alors de remarquer que Φ est la partie réelle d'une (unique) forme $\mathbb{C}$-linéaire continue x^*, définie par $\langle x^*, x\rangle = \Phi(x) - i\Phi(ix)$. □

5.4 Adjoint d'un opérateur

5.4.1 Cas général

Dans cette section, X et Y sont des espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $y^* \in Y^*$, alors l'application $x \mapsto \langle y^*, T(x)\rangle$ est une forme linéaire continue sur X. Comme cette application dépend de y^* et de T, il est acceptable de la noter $T^*(y^*)$. On obtient ainsi une application $T^* : Y^* \to X^*$, qui est entièrement définie par les identités

$$\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle\,,$$

où $y^* \in Y^*$ et $x \in X$.

Théorème 5.4.1 *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors l'application $T^* : Y^* \to X^*$ est linéaire continue, et on a $\|T^*\| = \|T\|$. L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ s'appelle l'***adjoint** *de l'opérateur T.*

Preuve. La linéarité est évidente. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{||y^*||\leq 1} ||T^*(y^*)|| &= \sup_{||y^*||\leq 1}\ \sup_{||x||\leq 1} |\langle T^*(y^*), x\rangle|;\\
&= \sup_{||x||\leq 1}\ \sup_{||y^*||\leq 1} |\langle y^*, T(x)\rangle|\\
&= \sup_{||x||\leq 1} ||T(x)||\,,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du théorème de Hahn-Banach (voir 5.3.3). Par conséquent, T^* est continue et $||T^*|| = ||T||$. □

Exemple Soit $\mathcal{F} : L^1([0; 2\pi]) \to c_0(\mathbb{Z})$ la transformation de Fourier, définie par

$$\mathcal{F}f = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\,,$$

où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f. Alors l'opérateur $\mathcal{F}^* : \ell^1(\mathbb{Z}) \to L^\infty([0; 2\pi])$ est donné par la formule

$$\mathcal{F}^*a\,(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}\,.$$

La preuve du résultat suivant est immédiate.

Proposition 5.4.2 *Si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$, alors $(TS)^* = S^*T^*$.*

Le résultat suivant est également très simple, mais souvent utile. Rappelons que si A est une partie d'un espace vectoriel normé E, on pose

$$A^\perp = \{x^* \in X^*;\ \langle x^*, a\rangle = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Proposition 5.4.3 *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, alors $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.*

Preuve. Il suffit d'écrire que pour $y^* \in Y^*$, on a $T^*(y) = 0$ si et seulement si $\langle T^*(y), x\rangle = 0$ pour tout $x \in X$. □

Corollaire 5.4.4 *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, alors T^* est injectif si et seulement si T est à image dense.*

Preuve. Cela découle de la proposition et du critère dual de densité. □

Notons que ce résultat n'est pas symétrique : il n'est pas vrai que T^* est nécessairement à image dense si T est injectif. Par exemple, si $\mathcal{F} : L^1([0;2\pi]) \to c_0(\mathbb{Z})$ est la transformation de Fourier, alors $\mathcal{F}$ est injectif, mais $\mathcal{F}^* : \ell^1(\mathbb{Z}) \to L^\infty([0;2\pi])$ n'est pas à image dense, car son image est contenue dans $\mathcal{C}([0;2\pi])$, qui n'est pas dense dans $L^\infty([0;2\pi])$.

Dans le même esprit, voici un résultat caractérisant la surjectivité en termes d'adjoint. La preuve est instructive, car elle mélange le théorème de Hahn-Banach et le théorème de l'image ouverte. C'est donc un excellent "résumé" de la façon dont ces résultats peuvent être utilisés.

Proposition 5.4.5 *Soient X et Y deux espaces de Banach réels. Pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *T est surjectif.*
(2) *Il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall y^* \in Y^* \quad \|T^*(y^*)\| \geq c\,\|y^*\|$.*
(3) *T^* est injectif et à image fermée.*

Preuve. Si T est surjectif, alors, d'après le théorème de l'image ouverte, on peut trouver une constante $C < \infty$ telle que $B_Y \subseteq T(CB_X)$. En écrivant la définition de la norme de $T^*(y^*)$, on en déduit que (2) est vérifiée avec $c = \frac{1}{C}$; les détails sont laissés en exercice. Par conséquent, (1) entraîne (2). L'équivalence de (2) et (3) découle du théorème d'isomorphisme de Banach et a déjà été démontrée (voir 4.5.5). Il reste donc à montrer que (2) entraîne (1).
Supposons (2) vérifiée pour une certaine constante $c > 0$. D'après le théorème 4.5.8, il suffit, pour établir la surjectivité de T, de montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\overline{T(CB_X)}$ contient la boule B_Y. On va "bien sûr" prendre $C = \frac{1}{c}$. Posons $B = \overline{T(\frac{1}{c}B_X)}$, et supposons qu'il existe un point $y_0 \in B_Y$ tel que $y_0 \notin B$. D'après le théorème de séparation des convexes, on peut alors trouver une forme linéaire $y_0^* \in Y^*$ telle que $\langle y_0^*, y_0\rangle > \sup\{\langle y_0^*, y;\ y \in B\}$. Comme $\|y_0\| \leq 1$, on a alors

$$\begin{aligned}\|y_0^*\| \geq \langle y_0^*, y_0\rangle &> \sup\left\{\langle y_0^*, T(x)\rangle;\ x \in \tfrac{1}{c}B_X\right\}\\ &= \sup\left\{\langle T^*(y_0^*), x\rangle;\ \|x\| \leq \tfrac{1}{c}\right\}\\ &= \tfrac{1}{c}\,\|T^*(y_0^*)\|,\end{aligned}$$

ce qui contredit (2). On a donc bien montré que (2) entraîne (1). □

Remarque. La proposition précédente est en fait valable également pour des espaces de Banach complexes. Il faut juste adapter la preuve de l'implication "(1) entraîne (2)". Le théorème de séparation des convexes fournit une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\Phi : Y \to \mathbb{R}$. Cette forme $\mathbb{R}$-linéaire Φ est la partie réelle d'une unique forme linéaire continue y_0^*, définie par $\langle y_0^*, y\rangle = \Phi(y) - i\Phi(iy)$. En utilisant y_0^*, la démonstration fonctionne encore si on observe que pour toute forme linéaire $x^* \in X^*$ (ici $x^* = T^*(y_0^*)$), on a $\|x^*\| = \sup\{\mathrm{Re}\,\langle x^*, x\rangle;\ \|x\| \leq 1\}$.

5.4.2 Cas hilbertien

Dans cette section, les lettres H, K, L désignent des espaces de Hilbert, sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note systématiquement $\langle\ ,\ \rangle$ les produits scalaires, avec la convention habituelle dans le cas complexe : $\langle x, y\rangle$ est linéaire par rapport à y et antilinéaire par rapport à x.

Si $T \in \mathcal{L}(H, K)$, alors T^* est par définition un opérateur linéaire de K^* dans H^*. Mais comme K^* s'identifie canoniquement à K et H^* à H, l'opérateur T^* s'identifie à un opérateur de K dans H, que l'on notera encore T^*, et qu'on appelle toujours l'adjoint de T. Ainsi $T^* : K \to H$ est défini par la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in K \times H \quad \langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle\,.$$

Il est important de noter que l'application $T \mapsto T^*$ est linéaire de $\mathcal{L}(H, K)$ dans $\mathcal{L}(K, H)$ si les espaces de Hilbert H et K sont réels, mais *antilinéaire* dans le cas complexe.

n vérifie immédiatement que si $T \in \mathcal{L}(H, K)$, alors $(T^*)^* = T$. Ainsi, l'application $T \mapsto T^*$ est une involution, et est donc en particulier bijective de $\mathcal{L}(H, K)$ sur $\mathcal{L}(K, H)$. Une conséquence de ce fait est que si un énoncé général concernant T et T^* est vrai, alors l'énoncé obtenu en échangeant les rôles de T et T^* est également vrai (et vice versa). Par exemple, on sait qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, K)$ est à image dense si et seulement si T^* est injectif, et on en déduit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, K)$ est injectif si et seulement si T^* est à image dense.

Exemple 1 Si on prend $H = \mathbb{K}^d$ muni de sa norme euclidienne usuelle, un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ s'identifie à sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{K}^d$. Alors la matrice M^* de T^* est la *trans-conjuguée* de M : si $M = (a_{ij})$, alors $M^* = (\overline{a_{ji}})$.

Preuve. Notons $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$. Alors $T(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$, et donc $a_{ij} = \langle e_i\, T(e_j)\rangle$ pour tout couple (i, j). Par conséquent, les coefficients de M^* sont donnés par $a^*_{ij} = \langle e_i, T^*(e_j)\rangle = \langle T(e_i), e_j\rangle = \overline{\langle e_j, T(e_i)\rangle} = \overline{a_{ji}}$. □

Exemple 2 L'exemple précédent se généralise en dimension infinie. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$, et notons e_i le i-ème vecteur de la "base canonique" de $\ell^2(\mathbb{N})$. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors T est entièrement déterminée par la "matrice infinie" $M = (a_{ij}) = (\langle e_i, T(e_j)\rangle)$. La matrice associée à T^* est $M^* = (\overline{a_{ij}})$.

L'exemple suivant généralise les deux précédents.

Exemple 3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré (comme toujours σ-fini). Pour* $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, *notons* $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *l'opérateur associé au noyau* K. *On a alors* $(T_K)^* = T_{K^*}$, *où* $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

Preuve. Rappelons que l'opérateur T_K est défini par

$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y)\, d\mu(y)\,.$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, on a formellement

$$\begin{aligned}\langle T_K f, g\rangle_{L^2} &= \int_\Omega \overline{T_K f(x)}\, g(x)\, d\mu(x)\\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \overline{f(y)}\ \overline{K(x,y)}\, g(x)\, d\mu(x) d\mu(y)\\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \overline{f(y)}\ K^*(y,x)\, g(x)\, d\mu(x) d\mu(y)\\ &= \int_\Omega \overline{f(y)}\, T_{K^*} g(y)\, d\mu(y)\\ &= \langle f, T_{K^*} g\rangle_{L^2}\,,\end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité. La justification de ce calcul repose bien entendu sur le théorème de Fubini : il suffit de montrer qu'on a $\int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|\, |f(y)|\, |g(x)|\, d\mu(x) d\mu(y) < \infty$, ce qui se prouve à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les détails sont laissés en exercice. □

Exemple 4 *Si p est une projection orthogonale, alors $p^* = p$.*

Preuve. Notons E l'image de p. Si $x, y \in H$, alors $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ car $p(y) \in E$ et $x - p(x)$ est orthogonal à E. De même, on a $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ car $p(x) \in E$ et $y - p(y) \in E^\perp$. Par conséquent, on a $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle$ pour tous $x, y \in H$, d'où le résultat. □

5.4.3 Norme d'un opérateur auto-adjoint

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur quelconque, alors, par définition de $\|T\|$ et grâce à l'identité $\|u\| = \sup\{|\langle u, y\rangle|;\ \|y\| \le 1\}$, on a

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\| \le 1,\ \ \|y\| \le 1\}\,.$$

Dans le cas où l'opérateur T est **auto-adjoint** ($T^* = T$), on a le résultat suivant, souvent utile.

Proposition 5.4.6 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors on a $||T|| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ ||x|| \le 1\}$. En particulier, si T est auto-adjoint et si $\langle T(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$, alors $T = 0$.*

Preuve. Posons $M = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ ||x|| \le 1\}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle T(x), x\rangle| \le ||T(x)||\, ||x|| \le ||T||$ pour tout $x \in B_H$, et donc $M \le ||T||$. C'est l'inégalité inverse qui est intéressante.
Par définition de M, on a

$$|\langle T(x), x\rangle| \le M\, ||x||^2$$

pour tout $x \in H$. D'autre part, comme T est auto-adjoint, on a par "polarisation" :

$$\mathrm{Re}\,\langle T(x), y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\right)$$

pour tous $x, y \in H$. On en déduit $\mathrm{Re}\,\langle T(x), y\rangle \leq \frac{M}{4}\,(||x+y||^2 + ||x-y||^2)$, autrement dit

$$\mathrm{Re}\,\langle T(x), y\rangle \leq \frac{M}{2}\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

pour tous $x, y \in H$. Le membre de droite ne change pas si on remplace y par λy, où $|\lambda| = 1$. En choisissant λ tel que $\langle T(x), \lambda y\rangle = |\langle T(x), y\rangle|$, on obtient donc

$$|\langle T(x), y\rangle| \leq \frac{M}{2}\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

pour tous $x, y \in H$. En remplaçant x par tx et y par $\frac{y}{t}$, où $t > 0$ cela donne

$$|\langle T(x), y\rangle| \leq \frac{M}{2}\left(t^2||x||^2 + \frac{||y||^2}{t^2}\right),$$

d'où finalement, en optimisant par rapport à t^2 :

$$\forall x, y \in H \qquad |\langle T(x), y\rangle| \leq M\,||x||\,||y||\,.$$

On a donc bien $||T|| \leq M$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque Si on veut simplement montrer qu'on a $M \neq 0$ si $T \neq 0$, alors on peut aller beaucoup plus vite : si $M = 0$, alors $\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$ pour tous $x, y \in H$, d'où $\mathrm{Re}\,\langle T(x), y\rangle = 0$ pour tous $x, y \in H$ (en développant le produit scalaire), et donc $T = 0$. La même preuve fournit le résultat purement algébrique suivant : *si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $B : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme hermitienne vérifiant $B(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$, alors $B = 0$.*

5.5 Convergence faible

Définition 5.5.1 *Soit E un espace vectoriel normé.*
(1) *On dit qu'une suite $(x_n) \subseteq E$ converge* **faiblement** *vers un point $x \in E$ si $\langle x^*, x_n\rangle$ tend vers $\langle x^*, x\rangle$ pour tout $x^* \in E^*$.*
(2) *On dit qu'une suite $(x_n^*) \subseteq E^*$ converge* **préfaiblement** *vers un point $x^* \in E^*$ si $\langle x_n^*, x\rangle$ tend vers $\langle x^*, x\rangle$ pour tout $x \in E$.*

Ces définitions appellent plusieurs remarques.

Remarque 1 *La convergence en norme entraîne la convergence faible ou préfaible. La réciproque est fausse en général, mais elle est vraie en dimension finie.*

Preuve. Il est clair que la convergence en norme entraîne la convergence faible. Si on prend $E = \ell^2(\mathbb{N})$ et si on note e_n le n-ième vecteur de la "base canonique", alors $\langle x, e_n\rangle$ tend vers 0 pour tout $x \in H$, donc (e_n) converge faiblement vers 0 ; mais on a $||e_n|| = 1$ pour tout n, donc (e_n) ne converge pas vers 0 en norme. Enfin, si X est de dimension finie, on peut supposer $E = (\mathbb{R}^d, || \, . \, ||_\infty)$. Alors la convergence faible entraîne la convergence “coordonnée par coordonnée” car les applications coordonnées sont des formes linéaires continues ; et cette dernière est simplement la convergence en norme. $\square$

Remarque 2 *On a* unicité de la limite *: une suite ne peut pas converger faiblement ou préfaiblement vers deux points différents.*

Preuve. Si (x_n) converge faiblement vers a et vers b, alors $\langle x^*, a\rangle = \langle x^*, b\rangle$ pour tout $x^* \in E^*$, donc $a = b$ car E^* sépare les points de E. La démonstration est identique pour la convergence préfaible ; elle est même plus simple car elle n'utilise pas le théorème de Hahn-Banach. $\square$

Remarque 3 *Sur E^*, la convergence faible entraîne la convergence préfaible. La réciproque est fausse.*

Preuve. La première assertion est évidente puisque E peut être considéré comme une partie de $(E^*)^*$. Pour montrer que la réciproque est fausse en général, on peut par exemple considérer $E = c_0$. Alors E^* s'identifie à ℓ^1 et E^{**} à ℓ^∞. Si on pose $e_n = (0, \dots, 1, 0, 0 \dots)$, alors (e_n) converge préfaiblement vers 0 dans ℓ^1 ; mais (e_n) ne converge pas faiblement vers 0, car si on pose $x^* = (1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty$, alors $\langle x^*, e_n\rangle = 1$ pour tout n. $\square$

Proposition 5.5.2 *Toute suite faiblement convergente $(x_n) \subseteq E$ est bornée. Si E est un espace de Banach, alors toute suite préfaiblement convergente $(x_n^*) \subseteq E^*$ est bornée.*

Preuve. Soit $(x_n) \subseteq E$ convergeant faiblement vers $x \in E$. Par hypothèse, pour tout $x^* \in E^*$, la suite $(\langle x^*, x_n\rangle)$ est bornée. Autrement dit, si on note $i_E : E \to E^{**}$ le plongement canonique de E dans son bidual, la suite $(i_E(x_n)) \subseteq E^{**}$ est simplement bornée sur E^*. Comme E^* est un espace de Banach, il découle du théorème de Banach-Steinhaus que la suite $(i_E(x_n))$ est bornée en norme. Et comme i_E est une isométrie, on en déduit que la suite (x_n) est bornée.
La preuve est identique pour la convergence préfaible. $\square$

Proposition 5.5.3 *Soit $C \subseteq E$ une partie convexe fermée. Si (x_n) est une suite de points de C convergeant faiblement vers $x \in E$, alors $x \in C$.*

Preuve. Supposons $x \notin C$. D'après le théorème de séparation des convexes, on peut trouver $x^* \in E$ telle que $\mathrm{Re}\,\langle x^*, x\rangle > 1$ et $\mathrm{Re}\,\langle x^*, z\rangle < 1$ pour tout $z \in C$. En particulier, on a $\mathrm{Re}\,\langle x^*, x_n\rangle < 1$ pour tout n, d'où $\mathrm{Re}\,\langle x^*, x\rangle \leq 1 < \mathrm{Re}\,\langle x^*, x\rangle$. Cette contradiction prouve que $x \in C$. $\square$

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 5.5.4 (Banach-Alaoglu)
Si l'espace vectoriel normé E est séparable, alors toute suite bornée $(x_n^*) \subseteq E^*$ possède une sous suite préfaiblement convergente.

Preuve. Soit (x_n^*) une suite bornée dans E^*. Alors la suite (x_n^*) est équicontinue et simplement bornée. D'après le théorème d'Ascoli 6.2.6, elle possède donc une sous-suite $(x_{n_k}^*)$ qui converge simplement sur E (et uniformément sur tout compact) vers une fonction continue $\Phi : E \to \mathbb{K}$. Comme les $x_{n_k}^*$ sont linéaires, Φ l'est également, donc $\Phi \in E^*$. Cela termine la démonstration. $\square$

Corollaire 5.5.5 *Si H est un espace de Hilbert, alors toute suite $(x_n) \subseteq H$ possède une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve. Si H est séparable, cela découle du théorème et de l'identification entre H^* et H. Dans le cas général, on considère l'espace de Hilbert séparable $H_0 = \overline{\mathrm{Vect}\,\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}}$ et on utilise la décomposition $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Les détails sont laissés en exercice. $\square$

Le théorème de Banach-Alaoglu possède d'innombrables applications. En voici une.

Proposition 5.5.6 *Soit H un espace de Hilbert, et soit $C \subseteq H$ une partie convexe fermée bornée. Si $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue, alors f est minorée et atteint sa borne inférieure.*

La preuve est basée sur le lemme suivant.

Lemme 5.5.7 *Soit H un espace de Hilbert. Si (C_n) est une suite décroissante de convexes fermés bornés non vides de H, alors $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_n \in C_n$. Alors la suite (x_n) est bornée car $x_n \in C_0$ pour tout n et C_0 est borné. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge faiblement vers un point $x_\infty \in H$. Si n est fixé, on a $n_k \geq n$ pour k assez grand, donc $C_{n_k} \subseteq C_n$, et donc $x_{n_k} \in C_n$. Comme C_n est convexe fermé et (x_{n_k}) converge faiblement vers x_∞, on en déduit $x_\infty \in C_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Preuve de 5.5.6. On applique le lemme aux ensembles C_n définis par

$$C_n = \{x \in C;\ f(x) \leq \alpha_n\}\,,$$

où (α_n) est une suite strictement décroissante convergeant vers $\inf_C f \in [-\infty; +\infty[$. Les C_n sont non vides par définition, ils sont convexes car f est convexe, fermés car f est continue, et bornés car C est borné. On a donc $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$, autrement dit $\{x \in C;\ f(x) = \inf_C f\} \neq \emptyset$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Chapitre 6

Espaces de fonctions continues

6.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Le théorème de Weierstrass classique affirme que toute fonction continue sur un intervalle compact $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales. On sait également que toute fonction continue 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques : cela découle par exemple du théorème de Fejer. On va démontrer ici un théorème très général qui englobe ces deux résultats classiques, et possède de nombreuses autres applications.

Dans toute cette section, K est un espace métrique compact. Une fois le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ spécifié, on note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(K)$ est une **sous-algèbre** de $\mathcal{C}(K)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K)$ stable par multiplication. Et on dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(K)$ **sépare les points de** K si pour tout couple $(x,y) \in K \times K$ avec $x \neq y$, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(y) \neq f(x)$.

Théorème 6.1.1 (Stone-Weierstrass, cas réel)
Soit $\mathcal{A}$ un sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. On suppose que $\mathcal{A}$ contient les fonctions constantes, et que $\mathcal{A}$ sépare les points de K. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

La démonstration utilise deux lemmes.

Lemme 6.1.2 *Il existe une suite de polynômes à coefficients réels (P_n) qui converge uniformément vers la fonction $t \mapsto |t|$ sur $[-1;1]$.*

Preuve. On pose $P_0 = 0$, et

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t^2 - P_n(t)^2\right).$$

Comme $|t| - P_{n+1}(t) = (|t| - P_n(t))(1 - \frac{1}{2}(|t| + P_n(t)))$, une récurrence facile montre qu'on a $0 \leq P_n(t) \leq |t|$ pour tout n et pour tout $t \in [-1;1]$. On en déduit que la suite (P_n) est croissante, et converge simplement vers une fonction $f \geq 0$ vérifiant $\frac{1}{2}(t^2 - f(t)^2) = 0$ pour tout t, autrement dit vers la fonction $t \mapsto |t|$. Pour montrer que la convergence est en fait uniforme, on peut utiliser le théorème de Dini : les P_n sont continues, leur limite également, et la suite (P_n) est croissante, donc le théorème s'applique. On peut aussi raisonner comme suit : l'identité $|t| - P_{n+1}(t) = (|t| - P_n(t))(1 - \frac{1}{2}(|t| + P_n(t)))$ montre qu'on a $|t| - P_{n+1}(t) \leq (1 - \frac{|t|}{2})(|t| - P_n(t))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on en déduit

$$|t| - P_n(t) \leq \left(1 - \frac{|t|}{2}\right)^n \times |t| \leq \min\left(\left(1 - \frac{|t|}{2}\right)^n, |t|\right),$$

et on conclut alors sans difficulté majeure à la convergence uniforme (c'est un bon exercice). □

Corollaire 6.1.3 *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Si $f \in \mathcal{A}$, alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Si $f, g \in \mathcal{A}$, alors $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}$*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}$; pour montrer que $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, on peut supposer $||f||_\infty \leq 1$. D'après le lemme, $|f|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes en f. Ces polynômes en f appartiennent à $\mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre, donc $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. On en déduit que si $f, g \in \mathcal{A}$, alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ et $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ appartiennent également à $\overline{\mathcal{A}}$. □

Lemme 6.1.4 *Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. On suppose que $\mathcal{A}$ contient les fonctions constantes et sépare les points de K. Alors $\mathcal{A}$ vérifie la propriété d'"interpolation" suivante : pour tout couple $(x, y) \in K \times K$ tel que $x \neq y$ et pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.*

Preuve. Soient $x, y \in K$, avec $x \neq y$. Comme $\mathcal{A}$ sépare les points de K, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Alors le déterminant du système linéaire

$$\begin{cases} \lambda g(x) + \mu &= \alpha \\ \lambda g(y) + \mu &= \beta \end{cases}$$

est non nul, donc ce système possède un unique couple solution (λ, μ). Comme $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel et contient les constantes, la fonction $f = \lambda g + \mu \mathbf{1}$ appartient à $\mathcal{A}$, et répond à la question. □

Preuve du théorème de Stone-Weierstrass. Il suffit de montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $||f - \varphi||_\infty \leq \varepsilon$. Fixons φ et ε. On cherche donc $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $\varphi - \varepsilon \leq f \leq \varphi + \varepsilon$.

Étape 1 *Pour tout $x \in K$, on peut trouver une fonction $f_x \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $f_x(x) = \varphi(x)$ et $f_x > \varphi - \varepsilon$.*

Preuve. Fixons $x \in K$. Pour tout $y \in K$, on peut, grâce au lemme 6.1.4, trouver une fonction $f^y \in \mathcal{A}$ telle $f^y(x) = \varphi(x)$ et $f^y(y) = \varphi(y)$. Par continuité de f^y et de φ, on peut trouver un voisinage ouvert V^y de y tel que $f^y > \varphi - \varepsilon$ sur V^y. La famille $(V^y)_{y \in K}$ est un recouvrement ouvert du compact K, donc on peut trouver $y_1, \ldots, y_p \in K$ tels que $K = V^{y_1} \cup \ldots \cup V^{y_p}$. Posons alors $f_x = \sup(f^{y_1}, \ldots, f^{y_p})$. Alors $f_x \in \overline{\mathcal{A}}$ d'après 6.1.3. De plus, on a $f_x(x) = \varphi(x)$, et $f_x > \varphi - \varepsilon$ par construction. En effet, tout point $z \in K$ est dans un certain V^{y_i}, et on a donc

$f_x(z) \geq f^{y_i}(z) > \varphi(z) - \varepsilon$. $\square$

Étape 2 *Existence de la fonction f.*

Pour tout $x \in K$, soit f_x la fonction donnée par l'étape 1. Par continuité de f_x et de φ, on peut trouver un voisinage ouvert V_x de x tel que $f_x < \varphi + \varepsilon$ sur V_x. On conclut alors comme précédemment en posant $f = \inf(f_{x_1}, \ldots, f_{x_m})$, où $x_1, \ldots, x_m$ sont choisis de sorte que $\bigcup_1^m V_{x_i} = K$. La fonction f appartient à $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$, d'après 6.1.4 appliqué à l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$. $\square$

Corollaire 6.1.5 (Stone-Weierstrass, cas complexe)
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ contenant les fonctions constantes et séparant les points de K. On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est **auto-conjuguée**, *ce qui signifie que si $f \in \mathcal{A}$, alors $\overline{f} \in \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.*

Preuve. Posons $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Alors $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ qui contient les fonctions constantes. De plus, si $f \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ appartiennent à $\mathcal{A}$, donc à $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$: en effet, on a $\mathrm{Re}(f) = \frac{f + \overline{f}}{2}$, donc $\mathrm{Re}(f) \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est auto-conjuguée, et de même pour $\mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathcal{A}$ sépare les points de K, on en déduit que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ sépare également les points de K. D'après le théorème de Stone-Weierstrass réel, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est donc dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Par conséquent, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, ce qui termine la démonstration puisque $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$. $\square$

Exemple 1 *Si $[a\,;b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}([a\,;b])$. Plus généralement, si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors les fonctions polynomiales en les d variables $x_1, \ldots, x_d$ sont denses dans $\mathcal{C}(K)$.*

Ce résultat est purement existentiel : il affirme que pour toute fonction continue f, on peut trouver une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f, mais ne donne pas de méthode pour construire de tels polynômes.
Il se trouve qu'il existe effectivement des procédés explicites d'approximation. Par exemple, si $f : [0\,;1] \to \mathbb{C}$ est continue, alors les polynômes $B_n f$ définis par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

convergent uniformément vers f, ce qui n'a rien d'évident. Ces polynômes sont les **polynômes de Bernstein** associés à f.
On peut aussi approcher par convolution, en utilisant 4.4.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, où la constante c_n est choisie de sorte que $\int_{-1}^{1} \varphi_n = 1$. On vérifie que si on pose $k_n = \mathbf{1}_{[-1;1]}\varphi_n$, alors la suite (k_n) est une unité approchée dans $L^1(\mathbb{R})$. Par conséquent, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue à support compact, alors $P_n f = f * k_n$ converge vers f uniformément. Explicitement, on a

$$P_n f(x) = c_n \int_{-1}^{1} f(x-t)(1-t^2)^n \, dt\,.$$

Par changement de variable, on a aussi $P_nf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)k_n(x-t)\,dt$. Comme $x - t \in [-1;1]$ si $|x| \leq 1/2$ et $|t| \leq 1/2$, on en déduit que si f est nulle en dehors de $[-1/2;1/2]$, alors

$$P_nf(x) = c_n \int_{-1}^{1} f(t)(1-(x-t)^2)^n\,dt$$

pour tout $x \in [-1/2;1/2]$. En développant $(1-(x-t)^2)^n$, on constate donc que les P_nf sont polynomiales sur $[-1/2;1/2]$. On obtient donc ainsi une approximation explicite par des polynômes pour toute fonction f continue à support dans $[-1/2;1/2]$.

Exemple 2 *Toute fonction continue 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

Preuve. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique. Alors il existe une unique application $\tilde{f} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, l'application $\tilde{f}$ est continue. En effet, si C est un fermé de $\mathbb{C}$, alors $\tilde{f}^{-1}(C) = p([0;2\pi] \cap f^{-1}(C))$, où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ est l'application $t \mapsto e^{it}$: cela vient du fait que la restriction de p à $[0;2\pi]$ est surjective. Comme f est continue, $f^{-1}(C)$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc $[0;2\pi] \cap f^{-1}(C)$ est compact. Par continuité de p on en déduit que $\tilde{f}^{-1}(C)$ est compact, donc fermé dans $\mathbb{T}$. Comme C est un fermé arbitraire de $\mathbb{C}$, cela prouve que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{T}$. Notons $\tilde{\mathcal{A}}$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendrée par les fonctions constantes, la fonction $z \mapsto z$ et la fonction $z \mapsto 1/z$; autrement dit, $\tilde{\mathcal{A}}$ est constituée par toutes les fonctions $\tilde{P}$ de la forme $\tilde{P}(z) = \sum_{i\in I} a_i z^i$, où I est une partie finie de $\mathbb{Z}$ et les a_i sont des nombres complexes. Alors $\tilde{\mathcal{A}}$ contient les constantes, et elle sépare les points de $\mathbb{T}$ grâce à la fonction $z \mapsto z$. De plus, $\mathcal{A}$ est *auto-conjuguée* car $\overline{z} = 1/z$ si $z \in \mathbb{T}$. On peut donc appliquer la version complexe du théorème de Stone-Weierstrass : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{A}}$ telle que que $||\tilde{P} - \tilde{f}||_\infty < \varepsilon$. Si on pose $P = \tilde{P}(e^{it})$, alors P est un polynôme trigonométrique et $||P - f||_\infty < \varepsilon$. $\square$

Ici encore, on dispose aussi de procédés d'approximation explicites, par exemples par les sommes de Fejer.

Exemple 3 *Si (K,d) est un espace métrique compact, alors les fonctions lipschitziennes sont denses dans $\mathcal{C}(K)$.*

Preuve. Notons $\mathrm{Lip}(K)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes $f : K \to \mathbb{C}$. Il est clair que $\mathrm{Lip}(K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K)$ contenant les fonctions constantes, et il n'est pas difficile de montrer que $\mathrm{Lip}(K)$ est en fait une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$. De plus, $\mathrm{Lip}(K)$ sépare les points de K. En effet, si $a, b \in K$, $a \neq b$, alors la fonction f définie par $f(x) = d(x,a)$ est lipschitzienne, et on a $f(a) = 0 \neq d(a,b) = f(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Stone-Weierstrass. $\square$

Dans ce cas aussi, on peut donner des procédés d'approximation explicites. Si $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, on vérifie que pour tout $\lambda > 0$, la fonction f_λ définie par

$$f_\lambda(x) = \inf\{f(y) + \lambda\, d(x,y)\}$$

est λ-lipschitzienne sur K (c'est en fait la *plus petite* fonction λ-lipschitzienne majorant f), et que $f_\lambda(x)$ tend vers $f(x)$ uniformément quand λ tend vers l'infini. C'est un excellent exercice.

Exemple 4 *Soient* (K, d_K) *et* (L, d_L) *deux espaces métriques compacts. Notons* $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(L)$ *le sous espace vectoriel de* $\mathcal{C}(K \times L)$ *engendré par les fonctions* $f : K \times L \to \mathbb{C}$ *de la forme* $f(x, y) = u(x)v(y)$*, où* $u \in \mathcal{C}(K)$ *et* $v \in \mathcal{C}(L)$*. Alors* $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(L)$ *est dense dans* $\mathcal{C}(K \times L)$*.*

Preuve. On vérifie sans difficulté que $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(L)$ est une sous-algèbre auto-conjuguée de $\mathcal{C}(K \times L)$ contenant les fonctions constantes. De plus, si (x, y) et (x', y') sont deux points distincts de $K \times L$, alors la fonction $f : K \times L \to \mathbb{C}$ définie par $f(u, v) = d_K(x, u) + d_L(y, v)$ appartient à $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(L)$, et on a $f(a) = 0 \neq f(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Stone-Weierstrass. $\square$

Voici enfin un exemple montrant que dans le cas complexe, on ne peut pas s'affranchir de l'hypothèse que l'algèbre $\mathcal{A}$ est auto-conjuguée.

Exemple 5 *Soit* $K = \overline{\mathbb{D}}$*, le disque unité fermé de* $\mathbb{C}$*. L'ensemble des fonctions polynomiales de la variable* $z \in \mathbb{C}$ *n'est* pas *dense dans* $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$*.*

Preuve. Si une fonction $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ est limite uniforme de fonctions polynomiales, alors elle est nécessairement holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}$. Ce n'est pas le cas de *toutes* les fonctions de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$! Par exemple, il suffit de considérer la fonction $z \mapsto \overline{z}$. Ici, on ne peut pas appliquer le théorème de Stone-Weierstrass car l'ensemble des fonctions polynomiales de la variable z n'est pas stable par conjugaison. $\square$

Terminons cette section par une conséquence utile du théorème de Stone-Weierstrass.

Proposition 6.1.6 *Si* (K, d) *est un espace métrique compact, alors l'espace de Banach* $\mathcal{C}(K)$ *est séparable.*

Preuve. Soit $D = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble dénombrable dense dans K ; un tel ensemble D existe car on sait qu'un espace métrique compact est séparable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \in \mathcal{C}(K)$ définie par $f_n(x) = d(x, a_n)$. Comme D est dense dans K, on vérifie sans difficulté majeure que l'ensemble $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ sépare les points de K. Si on pose $f_0 = \mathbf{1}$, on en déduit que la sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ engendrée par $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Mais toute fonction $f \in \mathcal{A}$ est limite uniforme de combinaisons linéaires à coefficients rationnels de fonctions du type $\prod_{i \in I} f_i$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$. Comme l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable, on en déduit que $\mathcal{A}$ est séparable, et donc que $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est également séparable. Comme $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) + i\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, cela termine la démonstration. $\square$

6.2 Théorème d'Ascoli

6.2.1 Équicontinuité

Dans cette section, E et F sont des espaces métriques, dont les distances sont toutes les deux notées d. On note $\mathcal{C}(E, F)$ l'ensemble des applications continues $f : E \to F$. Si $F = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{C}(E)$ au lieu de $\mathcal{C}(E, \mathbb{K})$.

Définition 6.2.1 *On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(E, F)$ est* **équicontinue en un point** $x \in E$ *si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 \quad \forall y \in E \quad d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F} \;\; d(f(x), f(y)) < \varepsilon \, .$$

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **équicontinue** *si elle est équicontinue en tout point $x \in E$.*

En d'autres termes, une famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(E, F)$ est équicontinue si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont continues et si, pour tout $x \in E$, on peut, étant donné $\varepsilon > 0$, prendre le même "δ de continuité" au point x pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$. Le préfixe "équi" indique une uniformité par rapport aux *fonctions* $f \in \mathcal{F}$. On dira qu'une *suite* $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(E, F)$ est équicontinue si l'ensemble $\{f_n;\; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu.

Exemple 0 Par définition, une famille $\mathcal{F}$ formée d'une seule fonction continue f est équicontinue. Plus généralement, toute partie finie de $\mathcal{C}(E, F)$ est équicontinue

Exemple 1 Si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont C-lipschitziennes, pour une même constante C, alors $\mathcal{F}$ est équicontinue. Plus généralement, il suffit que tout point $x \in E$ possède un voisinage ouvert V_x tel que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ soient C_x-lipschitziennes sur V_x, pour une même constante C_x dépendant uniquement de x.

Exemple 2 Si E et F sont des espaces vectoriels normés, et si $\mathcal{F}$ est une partie bornée de $\mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathcal{F}$, considérée comme partie de $\mathcal{C}(E, F)$, est équicontinue. C'est un cas particulier de l'exemple précédent.

Exemple 3 Soient $E = [0; 1]$, $F = \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = t^n$. Alors la suite (f_n) n'est pas équicontinue.

Terminons cette section par une remarque sans réelle importance. Convenons de dire qu'une famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(E, F)$ est *équi-uniformément-continue* si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F} \;\; d(f(x), f(y)) < \varepsilon \, .$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est équi-uniformément continue si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont uniformément continues et si, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre le même "δ d'uniforme continuité" pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$.

Remarque 6.2.2 *On suppose E compact. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(E, F)$ est équicontinue, alors $\mathcal{F}$ est équi-uniformément-continue.*

Preuve. Il suffit de recopier la troisième preuve donné au chapitre 3 du théorème affirmant qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue, en rajoutant un "$\forall f \in \mathcal{F}$" au bon endroit. $\square$

6.2.2 La version de base

Théorème 6.2.3 (Ascoli)
Soit K un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite de fonctions continues sur K. On suppose que la suite (f_n) est bornée dans $\mathcal{C}(K)$ et équicontinue. Alors (f_n) possède une sous-suite uniformément convergente.

La démonstration repose sur le lemme suivant, qui généralise 4.4.1.

Lemme 6.2.4 (lemme de “convergence forcée”)
Soient (E,d) un espace métrique, (F,d) un espace métrique complet, et (g_k) une suite dans $\mathcal{C}(E,F)$. On suppose que la suite (g_k) est équicontinue, et qu'il existe une partie dense $D \subseteq E$ telle que pour tout $z \in D$, la suite $(g_k(z))$ converge dans F. Alors :
(1) *la suite (g_k) converge en tout point $x \in E$;*
(2) *la convergence est uniforme sur tout compact ;*
(3) *la fonction $f = \lim_k g_k$ est continue.*

Preuve. Comme F est supposé complet, on obtiendra (1) et (2) simultanément si on montre que la suite (g_k) vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact. Soit $K \subseteq E$ un compact de E fixé, et soit $\varepsilon > 0$. Pour $a \in E$, soit $\delta_a > 0$ associé à ε dans la définition de l'équicontinuité de la suite (g_k) au point a, et notons O_a la boule ouverte $B(a, \delta_a)$. Alors la propriété suivante a lieu pour tout a :

$$(*) \qquad \forall u, v \in O_a \quad \forall k \quad d(g_k(u), g_k(v)) \leq 2\varepsilon\,.$$

La famille d'ouverts $(O_a)_{a \in K}$ recouvre le compact K. On peut donc trouver $a_1, \dots, a_p \in K$ tels que $K \subseteq O_{a_1} \cup \ldots \cup O_{a_p}$. De plus, comme D est dense dans E, chaque ouvert O_{a_i} contient un point $z_i \in D$. Posons alors $Z = \{z_1; \dots; z_p\}$. Par définition de Z, on peut associer à tout point $x \in K$ un point $z_x \in Z$ tel que x et z_x sont dans un même ouvert O_a. D'après $(*)$, on a alors $d(g_k(x), g_k(z_x)) \leq 2\varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc

$$\begin{aligned} d(g_p(x), g_q(x)) &\leq d(g_p(x), g_p(z_x)) + d(g_p(z_x), g_q(z_x)) + d(g_q(z_x), g_q(x)) \\ &\leq 4\varepsilon + d(g_p(z_x), g_q(z_x)) \end{aligned}$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, comme chaque suite $(g_k(z))$, $z \in D$ est convergente et que Z est fini, on peut trouver un entier N tel que $d(g_p(z), g_q(z)) \leq \varepsilon$ pour tout $z \in Z$ si $p, q \geq N$. Pour $p, q \geq N$, on a alors

$$\forall x \in K \quad d(g_p(x), g_q(x)) \leq 5\varepsilon\,.$$

Ainsi, (g_k) vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact $K \subseteq E$, ce qui prouve (1) et (2). Le point (3) est évident : il suffit de prendre $v = a$ dans $(*)$ et de faire tendre k vers l'infini pour obtenir la continuité de $f = \lim g_k$ en tout point $a \in E$. □

Preuve du théorème d'Ascoli. Comme l'espace métrique K est compact, il est séparable ; soit $D \subseteq K$ un ensemble dénombrable et dense dans K. Comme la suite (f_n) est bornée, elle possède une sous-suite $(g_k) = (f_{n_k})$ telle que la suite numérique $(g_k(z))$ converge pour tout $z \in D$: cela découle du théorème de Tikhonov (voir 3.4.4). Comme K est compact, la suite (g_k) est uniformément convergente, d'après le lemme 6.2.4. □

Corollaire 6.2.5 (Ascoli)
Si K est un espace métrique compact, alors les parties compactes de $(\mathcal{C}(K), || \,.\, ||_\infty)$ sont exactement les parties fermées, bornées et équicontinues. Les parties relativement compactes sont les parties bornées et équicontinues

Preuve. D'après le théorème précédent, il est clair que les parties bornées et équicontinues de $\mathcal{C}(K)$ sont relativement compactes, et donc que les parties fermées, bornées et équicontinues sont compactes. L'implication inverse, beaucoup moins importante, est un exercice instructif. Pour montrer qu'une partie compacte $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(K)$ est équicontinue, on peut par exemple appliquer le théorème de Dini aux fonctions $\Phi_n : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\Phi_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ |x - y| < 2^{-n}\}\,.$$

□

6.2.3 Raffinements

Plusieurs remarques méritent d'être faites concernant la preuve du théorème d'Ascoli.

• L'hypothèse que la suite (f_n) est bornée dans $\mathcal{C}(K)$, c'est-à-dire uniformément bornée, est formellement trop forte (même si elle est vérifiée a posteriori). Cette hypothèse intervient pour justifier l'emploi du théorème de Tikhonov, mais il suffit en fait de supposer seulement que la suite (f_n) est **simplement bornée**, autrement dit que pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x))$ est bornée.
• Plus généralement, on peut considérer des fonctions à valeurs dans un espace métrique (F, d). Alors la démonstration fonctionne encore dès lors qu'on peut appliquer le théorème de Tikhonov dans la première partie, et le lemme de convergence forcée. Pour cela, il suffit que l'espace métrique F soit complet et que la propriété suivante soit vérifiée :

$(*)$ pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans F.

• L'hypothèse $(*)$ est fastidieuse à écrire, mais la généralité est utile. Par exemple, $(*)$ sera automatiquement vérifiée si l'espace métrique F est *compact*. Elle est également vérifiée si F est un espace vectoriel normé *de dimension finie* et si la suite (f_n) est simplement bornée.
• En fait, si $(*)$ est vérifiée, on n'a même pas besoin de supposer que l'espace métrique (F, d) est complet : il suffit de constater que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\overline{\{f_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}}$ est complet pour d, et que cette hypothèse permet encore de faire fonctionner la preuve du lemme de convergence forcée.
• Pour trouver la sous-suite (g_k), on a seulement besoin de la séparabilité de K, et non de sa compacité.

On constate donc qu'on a en fait démontré le théorème suivant.

Théorème 6.2.6 (Ascoli précisé)
Soit (E, d) un espace métrique séparable, et soit (F, d) un espace métrique. Soit également $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(E, F)$. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.
(1) *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans F.*
(2) *La suite (f_n) est équicontinue.*

Alors (f_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue $f : E \to F$.

Corollaire 6.2.7 *Soient E et F deux espaces métriques* compacts. *Si $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(E,F)$ est équicontinue, alors (f_n) possède une sous-suite uniformément convergente.*

Corollaire 6.2.8 *Soit (E,d) un espace métrique séparable, et soit X un espace vectoriel normé* de dimension finie. *Si $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(E,X)$ est simplement bornée et équicontinue, alors (f_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue $f : E \to X$.*

6.2.4 Une application

Soit X un espace de Banach, et soit $f : [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \times \overline{B}(x_0,r) \to X$, où $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha, r > 0$. On s'intéresse au **problème de Cauchy**

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dans le chapitre sur les espaces complets, on a démontré le théorème de Cauchy-Lipchitz :

Théorème 6.2.9 *On fait les hypothèses suivantes.*
(1) *f est continue sur $\mathbf{C} = [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \times \overline{B}(x_0,r)$, et lipschitzienne par rapport à la variable $x \in \overline{B}(x_0,r)$.*
(2) *Il existe une constante M telle que $||f(t,x)|| \leq M$ sur $\mathbf{C}$, avec de plus $\alpha M \leq r$.*
Alors le problème de Cauchy $(*)$ possède une unique solution $x : [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \to \overline{B}(x_0,r)$.

Dans cette section, on va démontrer le résultat suivant.

Théorème 6.2.10 (Peano)
On suppose que l'espace de Banach X est de dimension finie, *et on fait les hypothèses suivantes.*
(1) *La fonction f est continue sur $K = [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \times \overline{B}(x_0,r)$.*
(2) *Il existe une constante M telle que $||f(t,x)|| \leq M$ sur K, avec $\alpha M \leq r$.*
Alors le problème de Cauchy $(*)$ possède au moins une solution $x : [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \to \overline{B}(x_0,r)$.

Preuve. L'idée est d'approcher la fonction f par des fonctions auxquelles on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, puis d'utiliser le théorème d'Ascoli pour conclure.
Comme X est de dimension finie, $K = [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \times \overline{B}(x_0,r)$ est un compact de $\mathbb{R} \times X$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ de la forme $\varphi = \Phi_{|K}$, où Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times X$. Il est clair que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ contenant les fonctions constantes. De plus $\mathcal{A}$ sépare les points de K car les deux applications coordonnées $\pi_1 : K \to \mathbb{R}$ et $\pi_2 : K \to X$ appartiennent à $\mathcal{A}$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathcal{A}$ est donc dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. On pouvait aussi appliquer 4.4.3, après avoir prolongé f en une fonction continue sur $\mathbb{R} \times X$ à support compact, grâce au théorème d'extension de Tietze 4.5.10. Comme X est de dimension finie, on peut l'identifier à $\mathbb{R}^d$, et on en déduit qu'on peut trouver une suite (f_n) fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times X$, à valeurs dans X, qui converge uniformément vers f sur K : il suffit d'approcher chaque composante de $f = (f^1, \dots, f^d)$ par des fonctions de $\mathcal{A}$. De plus, on peut également supposer qu'on

a $||f_n(t,x)|| \leq M$ sur K pour tout $n \in \mathbb{N}$: il suffit de remplacer f_n par $C_n f_n$, où $C_n = \frac{||f||_K}{2^{-n}+||f_n||_K}$; ou d'utiliser la remarque suivant 4.4.3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, donc sa restriction à K est lipschitzienne, d'après l'inégalité des accroissements finis. Comme de plus $||f_n(t,x)|| \leq M$ sur K, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui fournit une fonction $x_n : [t_0-\alpha; t_0+\alpha] \to \overline{B}(x_0,r)$ solution du problème de Cauchy associé à f_n et (t_0,x_0). On a ainsi

$$(*)_n \qquad\qquad x_n(t) = x_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_n(s, x_n(s))\, ds$$

pour tout $t \in I = [t_0-\alpha; t_0+\alpha]$.
Comme les x_n sont à valeurs dans $\overline{B}(x_0,r)$, la suite (x_n) est bornée dans $\mathcal{C}(K,X)$. De plus, on a $||x_n'(t)|| = ||f(t,x_n(t))|| \leq M$ pour tout $t \in I$, donc chaque fonction x_n est M-lipschitzienne. Par conséquent, la suite $(x_n) \subseteq \mathcal{C}(I,X)$ est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli, applicable car X est de dimension finie, on en déduit que la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction $x : I \to X$. La fonction x est en fait à valeurs dans $\overline{B}(x_0,r)$, car toutes les x_n le sont et $\overline{B}(x_0,r)$ est fermée dans X. On va voir que x est une solution du problème de Cauchy $(*)$.
Pour $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} ||f_{n_k}(t,x_{n_k}(t)) - f(t,x(t))|| &\leq ||f_{n_k}(t,x_{n_k}(t)) - f(t,x_{n_k}(t))|| + ||f(t,x_{n_k}(t)) - f(t,x(t))|| \\ &\leq ||f_{n_k} - f||_K + ||f(t,x_{n_k}(t)) - f(t,x(t))|| \end{aligned}$$

où on a posé $||u||_K = \sup\{||u(z)||;\ x \in K\}$. Comme la suite (f_{n_k}) converge uniformément vers f sur K et comme f est uniformément continue sur le compact I, on en déduit que $f_{n_k}(t,x_{n_k}(t))$ converge uniformément vers $f(t,x(t))$ quand k tend vers l'infini. On peut donc passer à la limite dans $(*)_{n_k}$ pour conclure que x est solution du problème de Cauchy $(*)$. □

Autre preuve (abrégée). La démonstration qui suit est plus courte, et plus "économique" car elle n'utilise ni le théorème de Cauchy-Lipschitz, ni le théorème de Stone-Weierstrass. Elle est, en contrepartie, plus astucieuse (et ne donne qu'une solution sur $[t_0; t_0+\alpha]$, ce qui est sans importance).
Posons $I = [t_0; t_0+\alpha]$ et $B_r = \overline{B}(x_0,r)$. On commence par montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver une fonction continue $x_n : [t_0 - \frac{\alpha}{n}; t_0+\alpha] \to B_r$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) $x_n(t) = x_0$ pour $t \in [t_0 - \frac{\alpha}{n}; t_0]$;

(b) $\forall t \in I \quad x_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\left(s, x_n(s-\tfrac{\alpha}{n})\right)\, ds$.

La fonction x_n est construite de proche en proche sur chaque intervalle $I_{k,n} := [t_0 + \frac{(k-1)\alpha}{n}\,;\, \frac{k\alpha}{n}]$: si x_n a été définie sur $I_{k,n}$, on la définit sur $I_{k+1,n}$ par la formule de (b) ; on utilise (2) pour montrer que x_n est à valeurs dans B_r. On montre ensuite que toutes les fonctions x_n sont M-lipschitziennes, ce qui permet d'appliquer le théorème d'Ascoli pour extraire de (x_n) une sous-suite (x_{n_k}) convergeant uniformément sur I vers une fonction continue $x : I \to B_r$. Comme les x_n sont M-lipschitziennes, on montre sans peine que $x_{n_k}(s - \frac{\alpha}{n_k})$ tend vers $x(s)$ uniformément sur I. En utilisant (b), on en conclut que x est solution du problème de Cauchy $(*)$. □

6.3 Fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

6.3.1 Topologie de la convergence uniforme sur tout compact

Dans cette section, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, et on note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω, à valeurs complexes.

Théorème 6.3.1 *Il existe une distance δ sur $\mathcal{C}(\Omega)$ vérifiant la propriété suivante : une suite $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ converge vers une fonction f pour la distance δ si et seulement si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ uniformément sur tout compact.*

La démonstration utilise le lemme suivant.

Lemme 6.3.2 *Il existe une suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de compacts de Ω vérifiant les propriétés suivantes : (K_i) est croissante, et tout compact de Ω est contenu dans l'un des K_i. En particulier, on a $\Omega = \bigcup_i K_i$. On dit que (K_i) est une* **suite exhaustive de compacts** *pour Ω.*

Preuve. Il suffit de poser $K_i = \{x \in \mathbb{R}^d;\ ||x|| \leq i \text{ et } d(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq 2^{-i}\}$, où $||\ .\ ||$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Les K_i sont visiblement contenus dans Ω, et ils sont compacts car fermés et bornés dans $\mathbb{R}^d$. Enfin, si K est un compact de Ω, alors K est borné, donc contenu dans une boule $\overline{B}(0, i_0)$; et la fonction continue $x \mapsto d(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ est strictement positive sur K, donc minorée par une constante $\varepsilon > 0$ par compacité. En choisissant $i \geq i_0$ tel que $2^{-i} \leq \varepsilon$, on voit qu'on a $K \subseteq K_i$.
□

Preuve du théorème. Soit (K_i) une suite exhaustive de compacts pour Ω. Pour $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ et pour tout compact $K \subseteq \Omega$, posons $||u||_K = \sup\{|f(x)|;\ x \in K\}$. On définit alors $\delta : \mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\delta(f, g) = \sum_0^\infty 2^{-n} \min\left(1, ||f - g||_{K_i}\right).$$

On vérifie sans difficulté majeure que δ est bien une distance sur $\mathcal{C}(\Omega)$. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise le fait que la fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \min(1, t)$ est croissante et sous-additive : $\varphi(s + t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$.
Soit $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ convergeant vers $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ au sens de la distance δ. Si K est un compact de Ω, alors $K \subseteq K_i$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$. On a donc $\min(1, ||f_n - f||_K) \leq 2^i \delta(f_n, f)$ pour tout n, donc $\min(1, ||f - f_n||_K)$ tend vers 0, et par conséquent $||f_n - f||_K$ tend vers 0. Ainsi, f_n tend vers f uniformément sur tout compact.
Inversement, soit $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i>N} 2^{-i} < \varepsilon$. On a alors

$$\delta(f_n, f) \leq \sum_{i=0}^{N} 2^{-i} \min(1, ||f_n - f||_{K_i}) + \varepsilon$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la somme figurant au membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini (c'est une somme finie de termes tendant vers 0), on en déduit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \delta(f_n, f) \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et donc $\lim_{n\to\infty} \delta(f_n, f) = 0$. $\square$

Remarque 6.3.3 *Il découle de la preuve précédente que la distance δ peut être choisie* **invariante par translation***, c'est-à-dire vérifiant $\delta(f+h, g+h) = \delta(f,g)$ pour toutes $f, g, h \in \mathcal{C}(\Omega)$.*

Toutes les distances sur $\mathcal{C}(\Omega)$ vérifiant la conclusion du théorème précédent définissent la même topologie sur $\mathcal{C}(\Omega)$. Pour des raisons évidentes, cette topologie est appelée la **topologie de la convergence uniforme sur tout compact**.

Proposition 6.3.4 *L'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ est complet pour toute distance invariante par translation compatible avec sa topologie.*

Preuve. Soit δ une telle distance, et soit $(f_n) \subseteq \Omega$ une suite de Cauchy pour δ. Il s'agit de montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact, et pour ce faire, il suffit de vérifier que (f_n) est uniformément de Cauchy sur tout compact. Fixons un compact $K \subseteq \Omega$.
Supposons que la suite (f_n) ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme sur K. On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ et deux sous-suites (f_{p_k}) et (f_{q_k}) telles que $||f_{p_k} - f_{q_k}||_K \geq \varepsilon$ pour tout k. Mais (f_n) est de Cauchy pour δ, donc $\delta(f_{p_k}, f_{q_k})$ tend vers 0. Comme δ est invariante par translation, il revient au même de dire que $\delta(f_{p_k} - f_{q_k}, 0)$ tend vers 0, autrement dit que $f_{p_k} - f_{q_k}$ tend vers 0 pour δ. Par conséquent, $f_{p_k} - f_{q_k}$ tend vers 0 uniformément sur tout compact, et on obtient donc une contradiction. $\square$

Proposition 6.3.5 *La topologie de la convergence uniforme sur tout compact ne peut pas être définie par une norme.*

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe une norme $||\ .\ ||$ sur $\mathcal{C}(\Omega)$ définissant la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Soit (K_n) une suite exhaustive de compacts pour Ω. Comme Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, il n'est pas compact, ce qui n'a rien d'évident : c'est la connexité de $\mathbb{R}^d$ qui intervient ici. On a donc $K_n \neq \Omega$ pour tout n, et on peut donc trouver une fonction $f_n \in \mathcal{C}(\Omega)$ nulle sur K_n mais non identiquement nulle : il suffit de poser $f_n(x) = d(x, K_n)$. Alors $g_n = \frac{f_n}{||f_n||}$ est bien définie puisque $f_n \neq 0$, et $g_n \equiv 0$ sur K_n. Comme la suite (K_n) est croissante et que tout compact de Ω est contenu dans l'un des K_n, on en déduit que (g_n) converge vers 0 uniformément sur tout compact. Par conséquent, $||g_n||$ doit tendre vers 0, ce qui est absurde puisque $||g_n|| = 1$ pour tout n. $\square$

6.3.2 Fonctions holomorphes

Dans cette section, Ω est un ouvert (non vide) de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. On munit $\mathcal{H}(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, héritée de l'espace $\mathcal{C}(\Omega)$.

Le résultat suivant est la traduction du **théorème de convergence de Weierstrass**.

Théorème 6.3.6 *$\mathcal{H}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\Omega)$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$, et l'application $f \mapsto f'$ est continue sur $\mathcal{H}(\Omega)$.*

On va maintenant caractériser les parties compactes de $\mathcal{H}(\Omega)$. Pour une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et un compact $K \subseteq \Omega$, on pose

$$||f||_K = \sup\{|f(z)|;\ z \in K\}\,.$$

Définition 6.3.7 *Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{H}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{F}$ est* **bornée** *dans $\mathcal{H}(\Omega)$ si la propriété suivante est vérifiée : pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe une constante $C_K < \infty$ telle que $||f||_K \leq C_K$ pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est bornée si pour tout compact $K \subseteq \Omega$, l'ensemble $\mathcal{F}_K = \{f_{|K} :\ f \in \mathcal{F}\}$ est borné dans $\mathcal{C}(K)$.*

Bien entendu, on dira qu'une *suite* $(f_n) \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ est bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$ si l'ensemble $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Théorème 6.3.8 (théorème de Montel)
Si (f_n) est une suite bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$, alors (f_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

La démonstration utilise un lemme bien connu et fondamental.

Lemme 6.3.9 (inégalités de Cauchy)
Si D et Δ sont deux disques ouverts tels que $\overline{D} \subseteq \Delta \subseteq \overline{\Delta} \subseteq \Omega$, alors on peut trouver une constante $C = C(D, \Delta)$ vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a $||f'||_{\overline{D}} \leq C\,||f||_{\overline{\Delta}}$.

"Preuve". L'application $f \mapsto f'$ est continue de $\mathcal{H}(\Delta)$ dans lui-même, donc l'application $f \mapsto f'_{|\overline{D}}$ est continue de $(\mathcal{C}(\overline{\Delta}) \cap \mathcal{H}(\Delta), ||\ .\ ||_\infty)$ dans $(\mathcal{C}(\overline{D}), ||\ .\ ||_\infty)$. Comme cette application est linéaire, cela donne directement la conclusion du lemme. Bien entendu, cette preuve n'est pas aussi simple qu'elle en a l'air, car elle utilise la continuité de la dérivation sur $\mathcal{H}(\Omega)$. □

Preuve du théorème de Montel. Soit (f_n) une suite bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Alors (f_n) est bien sûr simplement bornée. Pour tout point $z \in \Omega$, on peut trouver deux disques ouverts D_z et Δ_z de centre z tel que $\overline{D}_z \subseteq \Delta_z \subseteq \overline{\Delta}_z \subseteq \Omega$. D'après le lemme précédent et l'inégalité des accroissements finis, toutes les fonctions f_n sont C_z-lipschitziennes sur D_z, pour une certaine constante $C_z = C(D_z, \Delta_z)$. Par conséquent, la suite $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ est équicontinue en tout point $z \in \Omega$. Comme Ω est un espace métrique séparable, on peut donc appliquer le théorème d'Ascoli "précisé" 6.2.6. Ainsi, la suite (f_n) possède une sous-suite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. La fonction f est holomorphe, d'après le théorème de convergence de Weierstrass. □

Corollaire 6.3.10 *Les parties compactes de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont exactement les parties fermées et bornées. Les parties relativement compactes sont les parties bornées.*

Preuve. D'après le théorème de Montel, toute partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$ est relativement compacte, donc toute partie fermée bornée est compacte. Inversement, si $\mathcal{F}$ est un compact de $\mathcal{H}(\Omega)$, alors $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{H}(\Omega)$. De plus, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, l'ensemble $\mathcal{F}_K = \{f_{|K};\ f \in \mathcal{F}\}$ est un compact de $\mathcal{C}(K)$ car l'application $f \mapsto f_{|K}$ est continue de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(K)$. En particulier, $\mathcal{F}_K$ est borné dans $\mathcal{C}(K)$ pour tout compact $K \subseteq \Omega$, donc $\mathcal{F}$ est borné dans $\mathcal{H}(\Omega)$. □

Corollaire 6.3.11 *La topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$ ne peut pas être définie par une norme.*

Preuve. Comme $\mathcal{H}(\Omega)$ est de dimension infinie, il est "clair" que cela découle du résultat précédent et du théorème de Riesz. De façon précise, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une norme $||\ .\ ||$ sur $\mathcal{H}(\Omega)$ compatible avec la topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$. Alors, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, l'application $f \mapsto f_{|K}$ est linéaire continue de $(\mathcal{H}(\Omega), ||\ .\ ||)$ dans $\mathcal{C}(K)$. Il existe donc une constante C_K telle que $||f||_K \leq C_K$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $||f|| \leq 1$. Ainsi, la boule unité B de $(\mathcal{H}(\Omega), ||\ .\ ||)$ est une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$ au sens de 6.3.7. Comme B est également fermée, elle est compacte, d'après le théorème de Montel. Comme $\mathcal{H}(\Omega)$ est un espace vectoriel de dimension infinie, cela contredit le théorème de Riesz. $\square$

Chapitre 7

Opérateurs compacts

7.1 Généralités

Dans cette section, les lettres X, Y et Z désignent des espaces de Banach. On note B_E la boule unité d'un espace de Banach E.

Définition 7.1.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dit que T est un* **opérateur compact** *si $T(B_X)$ est une partie relativement compacte de Y.*

Cette définition se reformule comme suit.

Reformulation *Pour $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *T est compact.*
(2) *Pour toute partie bornée $B \subset X$, l'ensemble $T(B)$ est relativement compact dans Y.*
(3) *Pour toute suite bornée $(x_n) \subset X$, la suite $(T(x_n))$ possède une sous-suite convergente.*

Exemple 1 *Tout opérateur de rang fini est compact.*

Exemple 2 *Si X est de dimension infinie, alors Id_X n'est pas compact. Plus généralement, si $\dim(X) = \infty$ et si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est bijectif, alors T n'est pas compact.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est bijectif, alors T^{-1} est continu d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, donc $T(B_X)$ contient une boule $B(0,r)$ pour un certain $r > 0$. Si T était compact, alors $\overline{B}(0,r)$ serait une partie compacte de Y, donc Y serait de dimension finie d'après le théorème de Riesz, donc X aussi puisque X et Y sont isomorphes. $\square$

Exemple 3 *L'opérateur de Volterra $V : L^2([0;1]) \to \mathcal{C}([0;1])$ défini par $Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est compact.*

Preuve. L'application V est visiblement linéaire, et est bien à valeurs dans $\mathcal{C}([0;1])$ car l'intégrale indéfinie d'une fonction localement intégrable est toujours une fonction continue. Enfin, V est continue car $|Vf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq ||f||_1 \leq ||f||_2$ pour tout $x \in [0;1]$, et donc $||Vf||_\infty \leq ||f||_2$ pour $f \in L^2([0;1])$.

Posons $A = V(B_{L^2})$. Comme l'opérateur V est continu, A est une partie bornée de $\mathcal{C}([0;1])$. De plus, si $f \in B_{L^2}$ et $x, y \in [0;1]$, alors $Vf(y) - Vf(x) = \int_x^y f(t)\, dt$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\begin{aligned} |Vf(y) - Vf(x)| &\leq |y-x|^{1/2} \times \left|\int_x^y |f(t)|^2 dt\right|^{1/2} \\ &\leq ||f||_2 \times |y-x|^{1/2} \\ &\leq |y-x|^{1/2}, \end{aligned}$$

pour toute $f \in B_{L^2}$. On en déduit que $A = V(B_{L^2})$ est une partie équicontinue de $\mathcal{C}([0;1])$. D'après le théorème d'Ascoli, V est donc un opérateur compact. □

Dans la suite, on notera $\mathcal{K}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts de X dans Y, et on posera $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$.

Théorème 7.1.2 *$\mathcal{K}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{K}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$; les détails sont laissés en exercice. Montrons que $\mathcal{K}(X, Y)$ est fermé dans $\mathcal{L}(X, Y)$. Soit (T_n) une suite d'opérateurs compacts convergeant vers $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pour montrer que T est compact, il suffit de montrer que $T(B_X)$ est précompact, puisque l'espace Y est supposé complet. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (T_n) converge vers T, on peut trouver un entier N tel que $||T_N - T|| < \varepsilon$. On a alors $||T(x) - T_N(x)|| < \varepsilon$ pour tout $x \in B_X$. Comme T_N est compact, $T_N(B_X)$ possède un ε-réseau fini R. Si maintenant $y \in T(B_X)$, alors $y = T(x)$ pour un certain $x \in B_X$, et on a $||y - T_N(x)|| < \varepsilon$ d'après ce qui précède. Par le choix de R, on peut trouver $z \in R$ tel que $||T_N(x) - z|| < \varepsilon$, et on a alors $||y - z|| < 2\varepsilon$. Ainsi, R est un 2ε-réseau fini pour $T(B_X)$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 7.1.3 *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, alors T est compact.*

La réciproque de ce dernier résultat est fausse en général. Elle est cependant exacte si l'espace d'arrivée est un espace de Hilbert. De façon précise, on a le résultat suivant.

Proposition 7.1.4 *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons p_n la projection orthogonale de H sur $\mathrm{Vect}\,\{e_0; \dots; e_n\}$. Si $T \in \mathcal{L}(X, H)$ est compact, alors la suite $(p_n \circ T)$ converge vers T pour la norme de $\mathcal{L}(X, H)$.*

Preuve. Ici, bien sûr, on suppose que H est de dimension infinie. Comme (e_i) est une base hilbertienne de H, on sait que $p_n(y)$ tend vers y pour tout $y \in H$. De plus, on a $||p_n|| = 1$ pour tout n, donc la suite $(p_n) \subset \mathcal{C}(H, H)$ est équicontinue. On en déduit (d'après 6.2.4) que $p_n(y)$ tend vers y *uniformément* sur tout compact de H. En particulier, la convergence est uniforme sur le compact $\overline{T(B_X)}$, donc a fortiori sur $T(B_X)$. Autrement dit, $p_n(T(x))$ tend vers $T(x)$ uniformément sur B_X, ce qui signifie exactement que $p_n \circ T$ tend vers T pour la norme de $\mathcal{L}(X, H)$. □

Corollaire 7.1.5 *Si H est un espace de Hilbert, alors tout opérateur compact $T \in \mathcal{L}(X, H)$ est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Preuve. Si H est séparable, cela découle immédiatement de la proposition. Dans le cas général, il suffit donc de montrer que $H_0 := \overline{T(X)}$ est séparable. Mais on a $T(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(B_X)$, et comme $T(B_X)$ est séparable car précompact, on en déduit que $T(X)$ est séparable, donc H_0 également. □

Exemple (opérateur diagonal)
Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la "base canonique" de l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Pour $\Lambda = (\lambda_i) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, notons $T_\Lambda : H \to H$ l'opérateur "diagonal" défini par $T_\Lambda(\sum_0^\infty x_i e_i) = \sum_0^\infty \lambda_i x_i e_i$. Alors :
(1) T_Λ est bien défini, $T_\Lambda \in \mathcal{L}(H)$ et $||T_\Lambda|| = ||\Lambda||_\infty$;
(2) T est compact si et seulement si $\Lambda \in c_0(\mathbb{N})$.

Preuve. La partie (1) est laissée en exercice. D'après la proposition précédente, l'opérateur T_Λ est compact si et seulement si $\|p_n \circ T_\Lambda - T_\lambda\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Mais d'après (1) appliqué à $\Lambda^n = (0, \ldots, 0, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots)$, on a $||p_n \circ T_\Lambda - T_\Lambda|| = \sup_{i>n} |\lambda_i|$, ce qui donne (2). □

Théorème 7.1.6 *Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors T est compact si et seulement si T^* est compact.*

Preuve. Supposons T compact. Soit (y_n^*) une suite bornée dans Y^*. On considère les y_n^* comme des fonctions continues sur le compact $K = \overline{T(B_X)}$. Alors la suite $(y_n^*) \subset \mathcal{C}(K)$ est bornée et équicontinue puisque $\sup_n \|y_n^*\| < \infty$. D'après le théorème d'Ascoli, la suite (y_n^*) possède une sous-suite $(y_{n_k}^*)$ qui converge uniformément sur $K = \overline{T(B_X)}$, donc en particulier sur $T(B_X)$. Autrement dit, $\langle y_{n_k}^*, T(x)\rangle$ converge uniformément sur B_X, donc vérifie le critère de Cauchy uniforme sur B_X. Comme $\langle y_{n_k}^*, T(x)\rangle = \langle T^*(y_{n_k}^*), x\rangle$, cela signifie que la suite $(T^*(y_{n_k}^*))$ est de Cauchy pour la norme de Banach X^*, donc converge dans X^*. On a donc montré que T^* est un opérateur compact si T est compact.
Inversement, supposons T^* compact. Alors $(T^*)^* : X^{**} \to Y^{**}$ est également compact d'après ce qu'on vient de voir. Notons $i_X : X \to X^{**}$ et $i_Y : Y \to Y^{**}$ les plongements canoniques de X et Y dans leurs biduaux (voir 5.3.4). On vérifie sans difficulté (c'est, au sens strict, une "formalité"), qu'on a $T^{**} \circ i_X = i_Y \circ T$. Autrement dit, en identifiant X et Y à des sous-espaces (fermés) de X^{**} et Y^{**} via les plongements i_X et i_Y, on a $T^{**}_{|X} = T$. Comme T^{**} est compact, cela prouve que T est compact. □

Proposition 7.1.7 *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact, alors T change les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes. La réciproque est vraie si X est un espace de Hilbert.*

Preuve. Soit $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, et soit $(x_n) \subset X$ convergeant faiblement vers $\in X$. Comme T est linéaire continue, on vérifie sans difficulté que $T(x_n)$ tend *faiblement* vers $T(x)$. Comme de plus la convergence forte entraîne la convergence faible, on en déduit que la seule valeur d'adhérence (forte) possible pour la suite $(T(x_n))$ est $T(x)$. De plus, la suite (x_n) est bornée puisqu'elle converge faiblement, donc les $T(x_n)$ vivent dans un compact de Y puisque T est compact. On peut donc conclure que la suite $(T(x_n))$ converge (en norme) vers $T(x)$.
Si X est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée de X possède une sous-suite faiblement convergente. On en déduit immédiatement que si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ change les suites faiblement convergentes en suites convergentes, alors T est compact. □

Le dernier résultat de cette section montre en particulier que $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère de l'anneau (non commutatif) $\mathcal{L}(X)$.

Proposition 7.1.8 *Soient $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Si S ou T est compact, alors TS l'est également.*

La preuve est un exercice facile. □

Exemple Soit $V : L^2([0\,;1]) \to \mathcal{C}([0\,;1])$ l'opérateur de Volterra, et soit $\tilde{V} : L^2([0\,;1]) \to L^2([0\,;1])$ le même opérateur considéré comme opérateur de L^2 dans L^2. Formellement, on a $\tilde{V} = i \circ V$, où i est l'injection canonique de $\mathcal{C}([0\,;1])$ dans $L^2([0\,;1])$. Par conséquent, l'opérateur de Volterra reste compact quand on le considère comme opérateur de L^2 dans L^2.

7.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

7.2.1 Généralités

Dans cette section, H et K sont des espaces de Hilbert. On supposera que H est séparable, bien que ce ne soit pas réellement nécessaire.

Lemme 7.2.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H,K)$. Si $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ sont deux bases hilbertiennes de H, alors $\sum_{i\in I} ||T(e_i)||^2 = \sum_{j\in J} ||T(f_j)||^2$.*

Preuve. Soit $(k_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base hilbertienne de K fixée. Pour tout $i \in I$, on a

$$||T(e_i)||^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle k_\lambda, T(e_i)\rangle|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle T^*(k_\lambda), e_i\rangle|^2 .$$

On en déduit

$$\sum_{i\in I} ||T(e_i)||^2 = \sum_{I\times\Lambda} |\langle T^*(k_\lambda), e_i\rangle|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} ||T^*(k_\lambda)||^2 .$$

Comme le membre de droite ne dépend pas de (e_i), cela termine la démonstration. □

Définition 7.2.2 *Pour $T \in \mathcal{L}(H,K)$, on pose $||T||_{HS}^2 = \sum_{i\in I} ||T(e_i)||^2$, où $(e_i)_{i\in I}$ est n'importe quelle base hilbertienne de H. On dit que T est un* **opérateur de Hilbert-Schmidt** *si $||T||_{HS}^2 < \infty$.*

Exemple 0 *Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ a pour matrice (a_{ij}) dans une base orthonormée de $\mathbb{K}^d$, alors sa "norme de Hilbert-Schmidt" est donnée par $\|T\|_{HS}^2 = \sum\limits_{i,j} |a_{ij}|^2$.*

Exemple 1 *Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Pour $\Lambda = (\lambda_i) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, soit $T_\Lambda \in \mathcal{L}(H)$ l'opérateur diagonal défini par $T_\Lambda(\sum_i x_i e_i) = \sum_i \lambda_i x_i e_i$, où $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la "base canonique" de H. Alors T_Λ est de Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_0^\infty |\lambda_i|^2 < \infty$, et on a $||T_\Lambda||_{HS} = ||\Lambda||_2$.*

Exemple 2 *Tout opérateur de rang fini est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{L}(H,K)$ est de rang fini, alors $\mathrm{Ker}(T)$ est de co-dimension finie dans H. En écrivant $H = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Kert}(T)^\perp$, on voit donc qu'on peut donc trouver une base hilbertienne (e_i) de H telle que tous les e_i sauf un nombre fini appartiennent à $\mathrm{Ker}(T)$. La somme $\sum ||T(e_i)||^2$ est alors une somme finie, et par suite $||T||_{HS} < \infty$. □

Théorème 7.2.3 *Notons HS l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H dans K.*
(1) $(HS, ||\ .\ ||_{HS})$ est un espace de Hilbert.
(2) On a $||T||_{HS} \geq ||T||$ pour tout $T \in HS$. En particulier, la convergence pour la norme $||\ .\ ||_{HS}$ entraîne la convergence pour la norme de $\mathcal{L}(H)$.
(3) Les opérateurs de rang fini sont denses dans $(HS, ||\ .\ ||_{HS})$.

Preuve. On peut supposer que H est de dimension infinie. Dans tout ce qui suit, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
(1) Il est naturel d'introduire l'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}, K) = \left\{ b = (b_i) \in K^{\mathbb{N}};\ ||b||^2_{\ell^2(\mathbb{N},K)} := \sum_{i=0}^{\infty} ||b_i||^2 < \infty \right\} .$$

On démontre comme pour $\ell^2(\mathbb{N})$ que $\ell^2(\mathbb{N}, K)$ est un espace vectoriel, que $||\ .\ ||_{\ell^2(\mathbb{N},K)}$ est une norme sur $\ell^2(\mathbb{N}, K)$, et que muni de cette norme $\ell^2(\mathbb{N}, K)$ est un espace de Hilbert. Par définition, un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, K)$ est de Hilbert Schmidt si et seulement si la suite $\hat{T} := (T(e_i))$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, K)$, et on a alors $||T||_{HS} = ||\hat{T}||_{\ell^2(\mathbb{N},K)}$. Par conséquent HS est un espace vectoriel et l'application $T \mapsto \hat{T}$ est une isométrie linéaire de HS dans $\ell^2(\mathbb{N}, K)$.
Si $b = (b_i) \in \ell^2(\mathbb{N}, K)$, alors, pour tout $x \in H$, on a

$$\sum_{0}^{\infty} |\langle e_i, x\rangle|\, \|b_i\| \leq \|b\|_{\ell^2(\mathbb{N},K)}\, \|x\| ,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Bessel. En particulier, la série $\sum \langle e_i, x\rangle\, b_i$ est absolument convergente, donc convergente dans l'espace de Hibert K, et on peut poser

$$T_b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle e_i, x\rangle b_i .$$

On définit ainsi une application linéaire $T_b : H \to H$. L'inégalité précédente montre que T_b est continue, et on a $\hat{T_b} = b$ par définition, donc $T_b \in HS$. On a donc montré que l'isométrie linéaire $T \mapsto \hat{T}$ est bijective de HS sur $\ell^2(\mathbb{N}, K)$. Ainsi, HS est linéairement isométrique à l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, K)$, donc HS est un espace de Hilbert. Le produit scalaire de HS est défini par

$$\langle T, S\rangle_{HS} = \langle \hat{T}, \hat{S}\rangle_{\ell^2(\mathbb{N},K)} = \sum_{0}^{\infty} \langle T(e_i), S(e_i)\rangle .$$

(2) Soit $T \in HS$. Si $x \in H$, alors $T(x) = \sum_0^\infty \langle e_i, x\rangle\, T(e_i)$, où la série converge dans K. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc $||T(x)|| \leq ||x|| \times \left(\sum_0^\infty ||T(e_i)||^2\right)^{1/2}$ pour tout $x \in H$. Par conséquent, $||T|| \leq ||T||_{HS}$.
(3) Soit $T \in HS$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit T_n l'opérateur de rang fini défini par $T_n(x) = \sum_0^n \langle e_i, x\rangle\, T(e_i)$. Par définition de $||\ .\ ||_{HS}$, on a $\|T - T_n\|^2_{HS} = \sum_{i>n} \|T(e_i)\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (T_n) converge vers T pour la norme $||\ .\ ||_{HS}$. Ainsi, les opérateurs de rang fini sont denses dans $(HS, ||\ .\ ||_{HS})$. $\square$

Corollaire 7.2.4 *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Preuve. Si $T \in HS$, alors T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini pour la norme $|| \,.\, ||_{HS}$, donc a fortiori pour la norme de $\mathcal{L}(H, K)$. Par conséquent, T est compact. $\square$

Remarque Si on ne veut pas utiliser le théorème pour démontrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact, on peut procéder directement : on définit les opérateurs de rang fini T_n par

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle e_i, x\rangle \, T(e_i)\,,$$

et on montre avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'on a

$$||T_n(x) - T(x)||^2 \leq \left(\sum_{i>n} ||T(e_i)||^2\right) \times ||x||^2$$

pour tout $x \in H$, d'où $||T_n - T|| \leq \left(\sum_{i>n} ||T(e_i)||^2\right)^{1/2}$. $\square$

7.2.2 Exemple fondamental

Dans cette section, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, la mesure μ étant σ-finie. On fait de plus l'hypothèse suivante :

$$\text{(H)} \qquad \text{L'espace } \; L^2(\Omega, \mu) \; \text{ est séparable}\,.$$

Exemple *L'hypothèse* (H) *est vérifiée si* Ω *est un borélien de* $\mathbb{R}^d$ *et si* μ *est la mesure de Lebesgue.*

Preuve. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe une suite croissante $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de compacts de Ω telle que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_i K_i) = 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{C}(K_i)$ est séparable d'après 6.1.6. On choisit un ensemble dénombrable $\{f_n^i;\ n \in \mathbb{N}\}$ dense dans $\mathcal{C}(K_i)$ pour $|| \,.\, ||_\infty$, donc a fortiori pour la norme $|| \,.\, ||_2$. Comme $\mathcal{C}(K_i)$ est dense dans $L^2(K_i)$, on vérifie sans difficulté que l'ensemble dénombrable $D = \{\mathbf{1}_{K_i} f_n^i;\ i \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $L^2(\Omega)$. $\square$

On a vu au chapitre 4 que si $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ appartient à $L^2(\Omega \times \Omega)$, alors la formule

$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y)\, d\mu(y)$$

définit un opérateur linéaire continu $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. On va maintenant prouver le résultat suivant.

Théorème 7.2.5 *Si* $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$*, alors* $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *est un opérateur de Hilbert-Schmidt, avec* $||T_K||_{HS} = ||K||_{L^2(\Omega\times\Omega)}$*.*

Preuve. Pour $x \in \Omega$, définissons $K_x : \Omega \to \mathbb{C}$ par $K_x(y) = K(x, y)$. D'après le théorème de Fubini, on a $K_x \in L^2(\Omega)$ pour presque tout $x \in \Omega$, et

$$||K||_2^2 = \int_\Omega ||K_x||_2^2 \, d\mu(x)\,.$$

Soit maintenant $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. Pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$||K_x||_2^2 = \sum_{i\in I} |\langle e_i, K_x\rangle|^2 \,,$$

et on en déduit

$$||K||_2^2 = \sum_{i\in I} \int_\Omega |\langle e_i, K_x\rangle|^2 \, d\mu(x) \,.$$

Comme de plus $\langle e_i, K_x\rangle = \int_\Omega \overline{e_i(y)} K(x,y)\, d\mu(y) = T_K\overline{e_i}(x)$, on obtient donc

$$||K||_2^2 = \sum_{i\in I} ||T_K(\overline{e_i})||_2^2 \,.$$

Comme $(\overline{e_i})$ est tout autant une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ que (e_i), cela prouve que $T_K \in HS$, avec $||T_K||_{HS}^2 = ||K||_2^2$. □

Exemple Si on prend $\Omega = [0;1]$ et $K = \mathbf{1}_{x\geq y}$, alors T_K est l'opérateur de Volterra, considéré comme opérateur de $L^2([0;1])$ dans $L^2([0;1])$.

Remarques

(1) On vient de voir que tout opérateur sur $L^2(\Omega)$ défini par un noyau $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ est de Hilbert-Schmidt. Il se trouve que la réciproque est vraie : *tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ est du type T_K, pour un unique noyau $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$*. La preuve n'est pas très compliquée, mais on ne la donnera pas ici.

(2) Au lieu d'un espace produit $\Omega\times\Omega$, on peut considérer un produit de deux espaces mesurés (Ω,μ) et (Ω',μ') éventuellement différents. On montre alors exactement de la même façon que si $K \in L^2(\Omega\times\Omega')$, alors l'opérateur $T_K : L^2(\Omega') \to L^2(\Omega)$ est (bien défini et) de Hilbert-Schmidt.

7.3 Diagonalisation des opérateurs compacts

On a montré dans le chapitre sur la compacité que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Autrement dit, tout opérateur auto-adjoint sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ est diagonalisable en base orthonormée. On sait également que tout opérateur hermitien sur $\mathbb{C}^d$ (ou plus généralement tout opérateur *normal*) est diagonalisable en base orthonormée. On va démontrer ici des résultats analogues en dimension infinie. Dans toute cette section, H est un espace de Hilbert, réel ou complexe.

7.3.1 Préliminaires sur les valeurs propres

On regroupe ici quelques résultats utiles pour la suite, et intéressants pour eux-même. Rappelons qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **normal** s'il commute avec son adjoint, autrement dit si on a $TT^* = T^*T$.

Lemme 7.3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal.*
(1) *On a $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ pour tout $x \in H$.*
(2) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} Id)$. Autrement dit, λ est valeur propre de T si et seulement si $\overline{\lambda}$ est valeur propre de T^*, et les vecteurs propres associés sont les mêmes.*
(3) *Si T est auto-adjoint, alors les valeurs propres de T sont réelles.*
(4) *Les sous-espaces propres de T sont deux à deux orthogonaux.*
(5) *Si $E \subset H$ est stable par T, alors $E^\perp$ est stable par T^*.*

Preuve. Pour démontrer (1), on écrit

$$||T(x)||^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^*T(x)\rangle = \langle x, TT^*(x)\rangle = ||T^*(x)||^2 .$$

Comme $(T - \lambda Id)^* = T^* - \overline{\lambda} Id$, on obtient (2) en appliquant (1) à $T - \lambda Id$. Le point (3) est une conséquence de (2). Soient maintenant x et y deux vecteurs propres de T associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ. On a alors d'une part $\langle x, T(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle$, et d'autre part $\langle x, T(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ d'après ce qui précède. Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve (4). Le point (5) est laissé en exercice. □

Lemme 7.3.2 *Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre non nulle de T, alors le sous-espace propre associé est de dimension finie. La dimension de cet espace propre s'appelle la* **multiplicité** *de la valeur propre λ.*

Preuve. Soit λ une valeur propre non nulle de T, et posons $E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$. Par définition, E_λ est stable par T et $T_{|E_\lambda} = \lambda Id_{E_\lambda}$. Mais $T_{|E_\lambda}$ est également compact puisque T est compact, donc Id_{E_λ} est un opérateur compact puisque $\lambda \neq 0$. D'après le théorème de Riesz,, E_λ est donc de dimension finie. □

Si $\Lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, alors les valeurs propres d'un opérateur diagonal T_Λ sont exactement les λ_i. Si T_Λ est compact, les valeurs propres non nulles de T_Λ forment donc soit un ensemble fini, soit une suite tendant vers 0. Il se trouve que cette propriété est en fait partagée par *tous* les opérateurs compacts.

Proposition 7.3.3 *Soit X un espace de Banach, et soit $\in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact. Si T a une infinité de valeurs propres non nulles, alors ces valeurs propres forment une suite tendant vers 0.*

Preuve. Un instant de reflexion montre qu'il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur T n'a qu'un nombre fini de valeurs propres vérifiant $|\lambda| \geq \varepsilon$. Fixons $\varepsilon > 0$, et supposons qu'on puisse trouver une suite de valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, où les λ_i sont deux à deux distinctes et $|\lambda_i| \geq \varepsilon$ pour tout i. Choisissons pour tout i un vecteur propre e_i associé à λ_i. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, on vérifie sans peine que les e_i sont linéairement indépendants. Par conséquent, si on pose $E_0 = \{0\}$ et $E_n = \mathrm{Vect}\{e_1; \dots ; e_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors la suite (E_n) est une suite strictement croissante de sous-espaces fermés de X. D'après le lemme de Riesz 3.7.2, on peut donc trouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un vecteur $x_n \in E_n$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Alors x_n s'écrit $y_n + z_n$, où $y_n \in \mathbb{K}e_n$ et $z_n \in E_{n-1}$, et on a $d(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ par définition de x_n. Pour $p < q$, on a $T(x_q) - T(x_p) = \lambda_q(y_q - w_{p,q})$, où $w_{p,q} := \frac{1}{\lambda_q}T(x_p - z_q)$ appartient à E_{q-1} car E_{q-1} est stable par T. On en déduit que si $q > p$, alors $\|T(x_q) - T(x_p)\| \geq |\lambda_q| d(y_q, E_{q-1}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, la suite $(T(x_n))$ ne possède aucune sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de T. □

Corollaire 7.3.4 *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact, alors l'ensemble des valeurs propres de T est dénombrable.*

Voici pour finir un autre critère de dénombrabilité pour l'ensemble des valeurs propres d'une application linéaire. D'après 7.3.1, il s'applique en particulier au cas d'un opérateur normal sur un espace de Hilbert.

Lemme 7.3.5 *Soit H un espace préhilbertien séparable, et soit $T : H \to H$ une application linéaire. Si les sous-espaces propres de T sont deux à deux orthogonaux, alors l'ensemble des valeurs propres de T est dénombrable.*

Preuve. Notons Λ l'ensemble des valeurs propres de T, et pour toute valeur propre $\lambda \in \Lambda$, choisissons un vecteur propre x_λ associé, avec $\|x_\lambda\| = 1$. Alors la famille $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est orthonormale. Comme H est séparable, on en déduit, d'après 1.7.9, que Λ est nécessairement dénombrable. $\square$

7.3.2 Cas auto-adjoint

Théorème 7.3.6 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact auto-adjoint, alors H possède une base hilbertienne formée de vecteurs propres pour T.*

Preuve. La preuve est formellement identique à celle déjà donnée en dimension finie.

Étape 1 *Si $H \neq \{0\}$, alors T possède au moins une valeur propre.*

On peut bien sûr supposer $T \neq 0$. Posons $M = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ ||x|| = 1\}$. Comme T est auto-adjoint, on en fait $M = ||T||$ d'après 5.4.6 ; mais tout ce qui importe ici est de savoir qu'on a $M \neq 0$ (voir la remarque suivant 5.4.6). Par définition de M, il existe une suite $(x_n) \subset H$ telle que $||x_n|| = 1$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} |\langle T(x_n), x_n\rangle| = M$. Quitte à prendre une sous-suite et a changer T en $-T$, on peut supposer par exemple qu'on a $\lim_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle = M$. De plus, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, on peut également supposer que (x_n) converge faiblement vers un point $a \in H$. Comme la boule unité B_H est convexe et fermée, on a $a \in B_H$. De plus, comme T est compact, la suite $(T(x_n))$ converge *en norme* vers $T(a)$, d'après 7.1.7. En écrivant

$$\langle T(x_n), x_n\rangle - \langle T(a), a\rangle = \langle T(x_n) - T(a), x_n\rangle + \langle T(a), x_n - a\rangle$$

et en se souvenant que la suite (x_n) est bornée, on en déduit que $\langle T(x_n), x_n\rangle$ tend vers $\langle T(a), a\rangle$. Ainsi, on a $\langle T(a), a\rangle = M$. Introduisons alors la forme hermitienne $B : H \times H \to \mathbb{K}$ définie par

$$B(x, y) = \langle Mx - T(x), y\rangle\,.$$

B est bien une forme hermitienne, car T est auto-adjoint donc $MId - T$ également. De plus, B est positive par définition de M. Enfin, on a $B(a, a) = M\,||a||^2 - \langle T(a), a\rangle \leq 0$ puisque $||a|| \leq 1$ et $\langle T(a), a\rangle = M$, et donc $B(a, a) = 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à B, on a donc $|B(a, y)|^2 \leq 0 \times B(y, y)$, d'où $B(a, y) = 0$ pour tout $y \in H$, et donc $T(a) = Ma$. Comme $a \neq 0$ puisque $\langle T(a), a\rangle = M \neq 0$, on a donc montré que M est valeur propre de T. $\square$

Étape 2 On peut maintenant conclure la preuve. Notons Λ l'ensemble des valeurs propres de

T, et posons $E = \oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, où E_λ est l'espace propre associé à λ. Alors E est stable par T, donc $E^\perp$ est stable par T puisque T est auto-adjoint. De plus, la restriction de T à $E^\perp$ ne possède aucune valeur propre, par définition de E. D'après le cas 1 appliqué à l'espace de Hilbert $E^\perp$, on en déduit $E^\perp = \{0\}$. Ainsi, $E = \oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ est dense dans H. Par conséquent, si on choisit pour tout $\lambda \in \Lambda$ une base hilbertienne $(e_i^\lambda)_{i\in I_\lambda}$ de E_λ, alors la famille $(e_i^\lambda)_{\lambda,i}$ est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres pour T. Cette famille est bien orthogonale car les sous-espaces propres de T sont deux à deux orthogonaux. □

Variante. Si on veut éviter le recours à la convergence faible et au théorème de Banach-Alaoglu dans la première étape, on peut procéder comme suit. On définit la forme hermitienne positive

$$B(x, y) = \langle Mx - T(x), y\rangle$$

comme plus haut, et on fixe une suite $(x_n) \subset H$ telle que $||x_n|| = 1$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty}\langle T(x_n), x_n\rangle = M$. Comme $B(x_n, x_n) = M - \langle T(x_n), x_n\rangle$, on a donc $\lim B(x_n, x_n) = 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à B, on a

$$\forall u, v \in H \qquad |\langle Mu - T(u), v\rangle|^2 \leq B(u, u)\, B(v, v)\,.$$

En prenant la borne supérieure en $v \in B_H$, on en déduit qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\forall u \in H \qquad ||Mu - T(u)||^2 \leq C\, B(u, u)\,.$$

Comme $B(x_n, x_n)$ tend vers 0, il en résulte que $T(x_n) - Mx_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. De plus, comme T est compact et (x_n) bornée, on peut supposer que la suite $(T(x_n))$ converge vers un point $b \in H$. Comme $T(x_n) - Mx_n$ tend vers 0 et $M \neq 0$, la suite (x_n) converge alors vers $a = \frac{1}{M}b$, et on a $T(a) = Ma$ par continuité de T. Enfin, on a $\langle T(a), a\rangle = \lim\langle T(x_n), x_n\rangle = M \neq 0$, par continuité de T et du produit scalaire, donc $a \neq 0$. Ainsi, a est un vecteur propre pour T. □

Rappelons qu'un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit **unitaire** s'il est inversible et si $T^{-1} = T^*$. Il revient au même de dire que U change toute base hilbertienne de H en une base hilbertienne, ou que U change *une* base hilbertienne en une base hilbertienne. Deux opérateurs T et T' sont dits **unitairement équivalents** s'il existe un opérateur unitaire U tel que $T' = UTU^{-1}$. Le théorème de diagonalisation peut alors s'énoncer comme suit.

Corollaire 7.3.7 *On suppose que H est séparable. Alors un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact et auto-adjoint si et seulement si T est unitairement équivalent à un opérateur diagonal T_Λ, pour une suite $\Lambda \in c_0(\mathbb{N})$ à termes réels.*

Preuve. Cela découle immédiatement du théorème précédent, du fait qu'un opérateur diagonal T_Λ est compact si et seulement si $\Lambda \in c_0(\mathbb{N})$, et de l'identité $(T_\Lambda)^* = T_{\overline{\Lambda}}$. □

7.3.3 Cas normal

Rappelons qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit normal si T et T^* commutent. Par exemple, tout opérateur diagonal est normal. Dans le cas complexe, le théorème précédent s'étend au cas des opérateurs normaux compacts.

Théorème 7.3.8 *On suppose que l'espace de Hilbert H est complexe. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact et normal, alors H possède une base hilbertienne formée de vecteurs propres pour T.*

Preuve. Il suffit en fait en fait de montrer qu'un opérateur normal compact possède au moins une valeur propre. On recopie ensuite l'étape 2 de la démonstration précédente en remarquant que comme T est normal, T et T^* ont les mêmes vecteurs propres d'après 7.3.1, et donc, avec les notations précédentes, $E^\perp$ est stable par $(T^*)^* = T$. Soit donc $T \in \mathcal{L}(H)$ compact et normal, $T \neq 0$. Alors les opérateurs $A := \frac{T+T^*}{2}$ et $B := \frac{T-T^*}{2i}$ sont compacts et auto-adjoints, et l'un des deux est non nul puisque $A + iB = T \neq 0$. Supposons par exemple $A \neq 0$. D'après le théorème précédent, A possède au moins une valeur propre non nulle λ. Comme A est compact, le sous-espace propre E_λ associé est de dimension finie d'après 7.3.2, et il est stable par T car A et T commutent. Comme E_λ est un espace vectoriel complexe, la restriction de T à E_λ possède au moins une valeur propre, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 7.3.9 *On suppose que H est séparable. Alors un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact et normal si et seulement si il est unitairement équivalent à un opérateur diagonal T_Λ, pour une suite $\Lambda \in c_0(\mathbb{N})$.*

7.4 Applications du théorème de diagonalisation

7.4.1 Décomposition de Schmidt

On a vu que tout opérateur compact entre espaces de Hilbert est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. On a maintenant démontrer un résultat plus précis. Dans ce qui suit, H et K sont deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $e \in H$ et $f \in K$, on note $e \otimes f \in \mathcal{L}(H, K)$ l'opérateur de rang 1 défini par

$$e \otimes f(x) = \langle e, x \rangle f \, .$$

Théorème 7.4.1 (décomposition de Schmidt)
Soit $T \in \mathcal{L}(H, K)$ un opérateur compact. On suppose que T est de rang infini. Alors on peut trouver une suite orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$, une suite orthonormale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ et une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tendant vers 0 en décroissant telles que

$$T = \sum_0^\infty \sigma_n \, e_n \otimes f_n \, ,$$

où la série converge pour la norme de $\mathcal{L}(H, K)$.

Pour la preuve, on a besoin d'une partie des deux lemmes suivants.

Lemme 7.4.2 *Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites orthonormales, et soit $\sigma = (\sigma_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Pour tout $x \in H$, la série $\sum \sigma_n \, e_n \otimes f_n(x)$ converge dans H, et l'opérateur $\sum\limits_0^\infty \sigma_n \, e_n \otimes f_n$ ainsi défini est continu, avec $\| \sum\limits_0^\infty \sigma_n \, e_n \otimes f_n \| = \|\sigma\|_\infty$.*

Preuve. Si $x \in H$ et $p < q$, alors

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=p}^{q} \sigma_n \langle e_n, x \rangle \, f_n \|^2 &= \sum_{n=p}^{q} \sigma_n^2 |\langle e_n, x \rangle|^2 \\ &\leq \|\sigma\|_\infty^2 \sum_{n \geq p} |\langle e_n, x \rangle|^2 \, . \end{aligned}$$

Comme la série $\sum |\langle e_n, x\rangle|^2$ est convergente (d'après l'inégalité de Bessel), on en déduit que pour tout $x \in H$, les sommes partielles de la série $\sum \sigma_n \, e_n \otimes f_n(x)$ vérifient le critère de Cauchy. Ainsi, l'opérateur $S := \sum_0^\infty \sigma_n \, e_n \otimes f_n$ est bien défini. L'inégalité précédente (avec $p = 0$) donne $\|S(x)\| \leq \|\sigma\|_\infty \, |x\|$ pour tout $x \in H$, donc S est continu et $\|S\| \leq \|\sigma\|_\infty$. Enfin, on a $S(e_n) = \sigma_n f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\|S\| \geq \|\sigma\|_\infty$, et au total $\|S\| = \|\sigma\|_\infty$. □

Lemme 7.4.3 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$.
(1) *L'opérateur* $S = T^*T$ *est auto-adjoint et* positif ($\langle T^*T(x), x\rangle \geq 0$ *pour tout* $x \in H$).
(2) *On a* $\mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$.
(3) *On a également* $||T^*T|| = ||T||^2$.

Preuve. On a $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$, donc $S = T^*T$ est autoadjoint. De plus, on a $\langle T^*T(x), x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle = ||T(x)||^2$ pour tout $x \in H$, ce qui prouve que T^*T est positif et $\mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$. Enfin, on a d'une part $||T^*T|| \leq ||T^*|| \times ||T|| = ||T||^2$; et d'autre part, $||T(x)||^2 = \langle T^*T(x), x\rangle \leq ||T^*T(x)|| \, ||x|| \leq ||T^*T|| \, ||x||^2$ pour tout $x \in H$, donc $||T||^2 \leq ||T^*T||$. □

Preuve de 7.4.1. Comme T est compact, l'opérateur $T^*T \in \mathcal{L}(H)$ est également compact, et on vient de voir qu'il est auto-adjoint. D'après le théorème de diagonalisation, l'espace de Hilbert H possède une base hilbertienne formée de vecteurs propres pour T^*T. Comme de plus $\mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$, on en déduit que $H_0 := \mathrm{Ker}(T)^\perp$ possède une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de vecteurs propres pour T^*T associés à des valeurs propres non nulles. Notons que l'espace H_0 est de dimension infinie T est de rang infini. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors $T^*T(e_n) \neq 0$, donc $T(e_n) \neq 0$. De plus, les $T(e_n)$ sont deux à deux orthogonaux : on a $\langle T(e_n), T(e_m)\rangle = \langle T^*T(e_n), e_m\rangle = 0$ si $n \neq m$, puisque $T^*T(e_n)$ est colinéaire à e_n. Par conséquent, on peut poser $f_n := \frac{T(e_n)}{\|T(e_n)\|}$, et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale. Par définition de H_0, on a $T(x) = T(p_{H_0}(x))$ pour tout $x \in H$, où p_{H_0} est la projection orthogonale sur H_0 ; et comme (e_n) est une base hilbertienne de H_0, on a $p_{H_0}(x) = \sum_0^\infty \langle e_n, x\rangle \, e_n$ pour tout $x \in H$. On en déduit

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, x\rangle T(e_n) = \sum_{0}^{\infty} \sigma_n \, \langle e_n, x\rangle \, f_n$$

pour tout $x \in H$, où la série converge dans K et où on a posé $\sigma_n = \|T(e_n)\|$. Ainsi, on a $T = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \, e_n \otimes f_n$, où la série converge ponctuellement.

Comme la suite (e_n) est orthonormale, elle tend faiblement vers 0 : en effet, si $x \in H$, alors $\sum_0^\infty |\langle e_n, x\rangle|^2 < \infty$ d'après l'inégalité de Bessel, donc $\langle e_n, x\rangle$ tend en particulier vers 0. Comme T est compact, on en déduit que $T(e_n)$ tend vers 0 en norme, autrement dit que la suite (σ_n) tend vers 0. Quitte à réordonner la suite (σ_n), on peut donc supposer qu'elle *décroit* vers 0.

D'après le lemme 7.4.2, on a

$$\begin{aligned}\|T(x)-\sum_{n=0}^{N}\sigma_n\, e_n\otimes f_n(x)\|^2 &= \|\sum_{n=N+1}^{\infty}\sigma_n\, e_n\otimes f_n(x)\|^2\\ &\leq \sup_{n>N}|\sigma_n|^2\times\|x\|^2\end{aligned}$$

pour tout $x\in H$; ce qui s'écrit encore :

$$\|T-\sum_{n=0}^{N}\sigma_n\, e_n\otimes f_n\|\leq \sigma_{N+1}^2.$$

Comme la suite (σ_n) tend vers 0, on a donc montré que la série $\sum \sigma_n e_n\otimes f_n$ converge en fait vers T pour la norme de $\mathcal{L}(H,K)$. □

Remarque 1 *Si l'opérateur T est de rang fini, on a une décomposition analogue, la somme étant cette fois finie.*

Remarque 2 *La suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournie par le théorème précédent est déterminée de manière unique : pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\sigma_n=\mathrm{dist}(T,\mathcal{R}_n)$, où $\mathcal{R}_n\subseteq\mathcal{L}(H,K)$ est l'ensemble des opérateurs de rang au plus égal à n. Les nombres σ_n sont appelés les* **nombres singuliers** *de l'opérateur T.*

Preuve. Comme la suite (σ_n) est décroissante, on a $\|\sum_{i=n}^{\infty}\sigma_i\, e_i\otimes f_i\|=\sigma_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après le lemme 7.4.2. Ainsi :

$$\mathrm{dist}(T,\mathcal{R}_n)\leq\|T-\sum_{i<n}\sigma_i\, e_i\otimes f_i\|=\sigma_n\,.$$

Inversement, si $R\in\mathcal{R}_n$, alors $\mathrm{Ker}(R)\cap E\neq\{0\}$ pour tout sous-espace vectoriel $E\subseteq H$ de dimension $n+1$. C'est vrai en particulier pour $E_n:=\mathrm{Vect}\{e_0;\ldots;e_n\}$, donc on peut trouver un vecteur $a\in E_n$ tel que $\|a\|=1$ et $R(a)=0$. On a alors $\|T-R\|\geq\|(T-R)(a)\|=\|T(a)\|$. En écrivant $a=\sum_0^n a_ie_i$, on a

$$\begin{aligned}\|T(a)\|^2 &= \|\sum_{i=0}^{n}\sigma_ia_if_i\|^2\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sigma_i^2|a_i|^2\\ &\geq \sigma_n^2\sum_{i=0}^{n}|a_i|^2=\sigma_n^2\,,\end{aligned}$$

et on en déduit $\|T-R\|\geq\sigma_n$, pour tout opérateur $R\in\mathcal{R}_n$. Ainsi, on a $\mathrm{dist}(T,\mathcal{R}_n)\geq\sigma_n$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 3 Les σ_n^2 sont les valeurs propres non nulles de l'opérateur T^*T.

Preuve. On utilise les identités suivantes, dont la vérification est laissée en exercice : si $(e,f)\in H\times K$, alors

$$(e\otimes f)^*=f\otimes e\,,$$

et si $(e,f),(e',f') \in H \times K$, alors

$$(f' \otimes e')\,(e \otimes f) = \langle f', f\rangle\, e \otimes e' \, .$$

En utilisant ces deux identités, on voit que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \sigma_n\, e_n \otimes f_n\right)^* \left(\sum_{n=0}^{N} \sigma_n\, e_n \otimes f_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \sigma_n^2\, e_n \otimes e_n \, .$$

Par continuité du produit sur $\mathcal{L}(K,H) \times \mathcal{L}(H,K)$, on en déduit

$$T^*T = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2\, e_n \otimes e_n \, ,$$

ce qui donne sans peine le résultat souhaité. □

7.4.2 Noyaux et sommes de séries

Le résultat suivant est une conséquence utile du théorème de diagonalisation. On en donne plus bas une application amusante.

Proposition 7.4.4 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $K : J \times J \to \mathbb{C}$ appartenant à $L^2(J \times J)$, à valeurs réelles et vérifiant $K(x,y) \equiv K(y,x)$. On a*

$$||K||^2_{L^2(J\times J)} = \sum_{i\in I} \mu_i^2 \, ,$$

où $(\mu_i)_{i\in I}$ est la suite des valeurs propres non nulles de l'opérateur de Hilbert-Schmidt T_K, comptées avec leur multiplicité.

Preuve. Les hypothèses faites sur K assurent que l'opérateur de Hilbert-Schmidt T_K est auto-adjoint. Il suffit donc de rappeler qu'on a $||K||_2^2 = ||T_K||^2_{HS}$, et d'utiliser une base hilbertienne de diagonalisation pour calculer $||T_K||^2_{HS}$. □

Exemple Prenons $J = [0;1]$ et $K(x,y) = \min(x,y)$. Alors T_K est donné par la formule

$$T_K f(x) = \int_0^x y f(y)\, dy + x \int_x^1 f(y)\, dy \, .$$

On constate que si $f \in L^2([0;1])$, alors $T_K f(x)$ est en fait défini pour tout $x \in [0;1]$, et $T_K f$ est une fonction continue sur $[0;1]$. On en déduit que si f est un vecteur propre de T_K associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$, alors $f = \frac{1}{\lambda} T_K f$ est une fonction continue. Par définition de T_K, cela entraîne que $T_K f$ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$, donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda}\left(x f(x) + \int_x^1 f(y)\, dy - x f(x)\right) = \frac{1}{\lambda} \int_x^1 f(y)\, dy \, .$$

Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de l'équation différentielle

$$f'' = -\frac{1}{\lambda} f \, .$$

On a donc deux possibilités : ou bien $\lambda < 0$ et f est combinaison linéaire des fonctions $e^{\sqrt{1/|\lambda|}\,x}$ et $e^{-\sqrt{1/|\lambda|}\,x}$, ou bien $\lambda > 0$ et f est combinaison linéaire des fonctions $\cos(\sqrt{1/\lambda}\,x)$ et $\sin(\sqrt{1/\lambda}\,x)$. De plus, on doit avoir $f(0) = \frac{1}{\lambda} T_K f(0) = 0$, et $f'(1) = \frac{1}{\lambda}\int_1^1 f(y)\,dy = 0$. On en déduit alors que λ est nécessairement strictement positif, puis que f est de la forme $f(x) = B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,x\right)$, où B est une constante, et enfin qu'on a $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$. Inversement, on vérifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \sin\big((2k+1)\frac{\pi}{2}x\big)$ est vecteur propre de T_K associée à la valeur propre $\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$. Ainsi, les valeurs propres de T_K sont les $\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$, où $k \in \mathbb{N}$, et les espaces propres associés sont de dimension 1. D'après la proposition précédente, on a donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{(2k+1)^4\pi^4} = \int_{[0;1]\times[0;1]} \min(x,y)^2\, dxdy \, .$$

Cette dernière intégrale vaut $2\int_0^1 \left(\int_0^s t^2\,dt\right)\,ds = 2\int_0^1 \frac{s^3}{3}\,dx = \frac{1}{6}$. On a donc obtenu l'identité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \, ,$$

d'où on déduit facilement la formule classique $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

7.4.3 Systèmes de Sturm-Liouville

Dans cette section, $[a\,;b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On va appliquer le théorème de diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints à l'étude de l'opérateur différentiel $L_q : \mathcal{C}^2([a\,;b]) \to \mathcal{C}([a\,;b])$ défini par

$$L_q(f) = f'' - qf \, .$$

Dans toute la suite, on fixe α, $\beta \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha, \beta \neq 0$. On écrit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ et $\beta = (\beta_0, \beta_1)$. On dira qu'un nombre complexe μ est *valeur propre du système de Sturm-Liouville déterminé par q, α et β*, en abrégé *valeur propre de* $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^2([a\,;b])$ non nulle, solution de l'équation différentielle

$$f'' - qf = \mu f$$

avec les "conditions aux limites"

$$(*)_{\alpha,\beta} \quad \begin{cases} \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f'(a) = 0 \\ \beta_0 f(b) + \beta_1 f'(b) = 0 \end{cases}$$

On dit qu'une telle fonction f est une *fonction propre* du système $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ associée à la valeur propre μ.

Notons $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([a\,;b])$ constitué par les fonctions f vérifiant les conditions aux limites $(*)_{\alpha,\beta}$. Alors μ est valeur propre de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ si et seulement si il existe une fonction non nulle $f \in \mathcal{E}(\alpha,\beta)$ telle que $L_q(f) = \mu f$. Avec un léger abus de langage, les valeurs propres de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ sont donc exactement les valeurs propres de l'opérateur

$$L_q^{\alpha,\beta} : \mathcal{E}(\alpha,\beta) \to \mathcal{C}([a\,;b])$$

restriction de L_q au sous-espace $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$.

On peut se demander pourquoi s'intéresser aux valeurs propres d'un opérateur différentiel. Ce type de question intervient par exemple lorsqu'on veut résoudre une équation aux dérivées partielles par la méthode dite de *séparation des variables*. De façon précise, considérons une équation aux dérivées partielles du type

$$\sum_{i=0}^{k} a_j(t)\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = \sum_{j=0}^{l} b_j(x)\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\,.$$

Si on cherche une solution de la forme $u(t,x) = f(t)g(x)$, on obtient l'équation

$$g(x)\sum_{i=0}^{k} a_i(t)f^{(i)}(t) = f(t)\sum_{j=0}^{l} b_j(x)g^{(j)}(x)\,,$$

d'où, en supposant que f et g ne s'annulent pas :

$$\frac{1}{f(t)}\sum_{i=0}^{k} a_i(t)g^{(i)}(t) = \frac{1}{g(x)}\sum_{j=0}^{l} b_j(x)g^{(j)}(x)\,.$$

Comme le premier membre ne dépend que de t et que le deuxième membre ne dépend que de x, ils doivent être tous les deux égaux à une même constante μ. On obtient donc un système de deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i f^{(i)} = \mu f \\ \sum\limits_{j=0}^{l} b_j g^{(j)} = \mu g \end{cases}$$

Ainsi, μ est une valeur propre des deux opérateurs différentiels $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i \frac{d^i}{dt^i}$ et $\sum\limits_{j=0}^{l} b_j \frac{d^j}{dx^j}$.

On va démontrer ici le résultat suivant.

Théorème 7.4.5 *L'espace $L^2([a\,;b])$ possède une base hilbertienne formée de fonctions propres pour le système $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$. Les valeurs propres de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ sont toutes réelles, et elles forment une suite $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{i\to\infty}|\mu_i| = +\infty$.*

La démonstration utilise trois lemmes.

Lemme 7.4.6 *L'opérateur L_q est "formellement auto-adjoint" sur $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$ pour le produit scalaire usuel de $L^2([a\,;b])$: si $u,v \in \mathcal{E}(\alpha,\beta)$, alors $\langle L_q(u),v\rangle_{L^2} = \langle u, L_q(v)\rangle_{L^2}$.*

Preuve. Rappelons que le produit scalaire de $L^2([a\,;b])$ est défini par

$$\langle u,v\rangle_{L^2}=\int_a^b \overline{u}(t)v(t)\,dt\,.$$

Pour démontrer le lemme, on commence par vérifier (c'est immédiat), que si $u,v\in\mathcal{C}^2([a\,;b])$, alors

$$u\,L_q(v)-L_q(u)\,v=(uv'-u'v)'\,.$$

Comme q est réelle, on a $L_q(\overline{u})=\overline{L_q(u)}$. En appliquant l'identité précédente à $\overline{u}$ et v et en intégrant, on obtient donc

$$\langle u,L_q(v)\rangle_{L^2}-\langle L_q(u),v\rangle_{L^2}=[\overline{u}v'-\overline{u}'v]_a^b\,.$$

Si maintenant u et v vérifient les conditions aux limites $(*)_{\alpha,\beta}$ (donc $\overline{u}$ et v également puisque α et β sont réels), alors les deux vecteurs $\begin{bmatrix}\overline{u}(a)\\ \overline{u}'(a)\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}v(a)\\ v'(a)\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^2$ sont liés car ils vérifient tous les deux l'équation linéaire non triviale $\alpha_0x+\alpha_1y=0$; et de même les vecteurs $\begin{bmatrix}\overline{u}(b)\\ \overline{u}'(b)\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}v(b)\\ v'(b)\end{bmatrix}$ sont liés. On a donc $\overline{u}(a)v'(a)-v(a)\overline{u}'(a)=0=\overline{u}(b)v'(b)-v(b)\overline{u}'(b)$, d'où $[\overline{u}v'-v\overline{u}']_a^b=0$. $\square$

Corollaire 7.4.7 *Les valeurs propres du système* $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ *sont réelles, et forment un ensemble dénombrable.*

Preuve. Du caractère formellement auto-adjoint de L_q sur $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$, on déduit sans peine que les valeurs propres de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ sont réelles et que les espaces propres associés sont orthogonaux. Grâce au lemme 7.3.5 (en prenant pour H l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$), on en déduit que l'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ est dénombrable. $\square$

Rappelons que si $K\in L^2([a\,;b]\times[a\,;b])$, on note $T_K:L^2([a\,;b])\to L^2([a\,;b])$ l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par

$$T_Kg(x)=\int_a^b K(x,y)g(y)\,dy\,.$$

Lemme 7.4.8 *On suppose que* 0 *n'est pas valeur propre du système* $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$. *Alors l'opérateur* $L_q^{\alpha,\beta}:\mathcal{E}(\alpha,\beta)\to\mathcal{C}([a\,;b])$ *est bijectif. De plus, il existe une fonction* $K:[a\,;b]\times[a\,;b]\to\mathbb{C}$ *continue, réelle et symétrique, telle que* $(L_q^{\alpha,\beta})^{-1}(g)=T_K(g)$ *pour toute fonction* $g\in\mathcal{C}([a\,;b])$.

Preuve. On notera Λ_α et Λ_β les formes linéaires définies sur $\mathcal{C}^1([a\,;b])$ par

$$\begin{cases}\Lambda_\alpha(f)=\alpha_0f(a)+\alpha_1f'(a)\\ \Lambda_\beta(f)=\beta_0f(b)+\beta_1f'(b)\end{cases}$$

Étant donnée $g\in\mathcal{C}([a\,;b])$, il s'agit de montrer que l'équation différentielle linéaire

$$y''-qy=g$$

possède une unique solution f vérifiant les conditions aux limites $(*)_{\alpha,\beta}$, autrement dit $\Lambda_\alpha(f)=0=\Lambda_\beta(f)$, et de donner une formule pour f. Pour cela, on va utiliser la méthode de variation des constantes, à partir d'une paire bien choisie de solutions de l'équation homogène $y''-qy=0$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions réelles de l'équation $y'' - qy = 0$ forment un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension 2, et pour tout point $t_0 \in [a\,;b]$, l'application $y \mapsto \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme α et β sont non nuls, on en déduit que les formes linéaires Λ_α et Λ_β ne sont donc pas identiquement nulles sur $\mathcal{F}$. Ainsi, on peut trouver deux fonctions réelles non nulles $u, v \in \mathcal{C}^2([a\,;b])$ vérifiant $L_q(u) = 0 = L_q(v)$ et $\Lambda_\alpha(u) = 0 = \Lambda_\beta(v)$.
Comme 0 n'est pas valeur propre de $\mathbf{SL}(q, \alpha, \beta)$, on a $\Lambda_\alpha(v) \neq 0$ et $\Lambda_\beta(u) \neq 0$. Les fonctions u et v ne sont donc pas proportionnelles ; autrement dit, elles sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$. Ainsi, u et v forment une base de l'espace des solutions complexes de l'équation $y'' - qy = 0$, donc leur wronskien $W := uv' - u'v$ ne s'annule jamais. De plus, W est en fait une constante car $0 = u\,L_q(v) - L_q(u)\,v = (uv' - u'v)' = W'$. En appliquant la méthode de variation des constantes à la base (u, v), on trouve que les solution de l'équation différentielle $y'' - qy = g$ sont les fonctions f de la forme

$$f = \varphi u + \psi v\,,$$

où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ soumises aux conditions $W\psi' = ug$ et $W\varphi' = -vg$. On sait également qu'on a alors

$$f' = \varphi u' + \psi v'\,.$$

On en déduit

$$\begin{cases} \Lambda_\alpha(f) = \varphi(a)\Lambda_\alpha(u) + \psi(a)\Lambda_\alpha(v) \\ \Lambda_\beta(f) = \varphi(b)\Lambda_\beta(u) + \psi(b)\Lambda_\beta(v) \end{cases}$$

soit $\Lambda_\alpha(f) = \psi(a)\Lambda_\alpha(v)$ et $\Lambda_\beta(f) = \varphi(b)\Lambda_\beta(u)$. Comme $\Lambda_\alpha(v)$ et $\Lambda_\beta(u)$ sont non nuls, on en déduit que f vérifie les conditions aux limites $(*)_{\alpha,\beta}$ si et seulement si $\psi(a) = 0 = \varphi(b)$. Ainsi, l'équation différentielle $y'' - qy = g$ possède une unique solution $f \in \mathcal{E}(\alpha, \beta)$, donnée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{W}\left(u(x)\int_x^b v(y)g(y)\,dy + v(x)\int_a^x u(y)g(y)\,dy\right)\,.$$

En regroupant tout sous une même intégrale, on obtient

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)g(y)\,dy\,,$$

où $K : [a\,;b] \times [a\,;b] \to \mathbb{C}$ est définie par

$$K(x,y) = \begin{cases} W^{-1}u(x)v(y) & \text{si } x \leq y \\ W^{-1}u(y)v(x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

La fonction K étant visiblement continue, réelle et symétrique, cela termine la démonstration. $\square$

Lemme 7.4.9 *On suppose que* 0 *n'est pas valeur propre de* $\mathbf{SL}(q, \alpha, \beta)$*, et on note* K *le noyau donné par le lemme précédent.*
(1) L'opérateur T_K *est injectif sur* $L^2([a\,;b])$*.*
(2) Un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *est valeur propre de* T_K *si et seulement si* $\frac{1}{\lambda}$ *est valeur propre de* $\mathbf{SL}(q, \alpha, \beta)$*, et les fonctions propres associées sont les mêmes.*

Preuve. Comme la fonction K est réelle et symétrique, l'opérateur $T_K : L^2([a\,;b]) \to L^2([a\,;b])$ est auto-adjoint. Pour montrer que T_K est injectif, il suffit donc de montrer que $T_K = T_K^*$ est à image dense. Mais par le lemme précédent on sait que $L_q^{\alpha,\beta} : \mathcal{E}(\alpha,\beta) \to \mathcal{C}([a\,;b])$ est bijectif d'inverse donné par T_K ; on a par conséquent $T_K(\mathcal{C}([a\,;b])) = \mathrm{Im}((L_q^{\alpha,\beta})^{-1}) = \mathcal{E}(\alpha,\beta)$, donc $\mathrm{Im}(T_K)$ contient $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$. Comme $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$ contient toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support dans $]a\,;b[$, on en déduit que T_K est bien à image dense, ce qui donne (1).
Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de T_K et soit $g \in L^2([a\,;b])$ une fonction propre associée, $T_K(g) = \lambda g$. Comme la fonction K est continue, le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres montre que $T_K(g)$ est continue. Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit que $g \in \mathcal{C}([a\,;b])$. D'après le lemme 7.4.8, on sait alors que $T_K(g) \in \mathcal{E}(\alpha,\beta)$, donc $g = \frac{1}{\lambda}T_K(g) \in \mathcal{E}(\alpha,\beta)$; et comme $L_q T_K(g) = g$, on a $L_q(g) = \frac{1}{\lambda}g$. Ainsi, $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ et g est une fonction propre associée. On montre de même que si $\mu \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ et si f est une fonction propre associée, alors $\frac{1}{\mu}$ est valeur propre de T_K et f est fonction propre associée. □

Preuve du Théorème 7.4.5. Si 0 n'est pas valeur propre de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$, le théorème découle directement de 7.4.7, du lemme 7.4.9 et du théorème de diagonalisation appliqué à l'opérateur compact auto-adjoint $T_K : L^2([a\,;b]) \to L^2([a\,;b])$. Pour le cas général, on choisit un nombre réel μ_0 qui n'est *pas* valeur propre de $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$, ce qui est possible d'après 7.4.7, et on applique le premier cas au système $\mathbf{SL}(q+\mu_0,\alpha,\beta)$. □

Remarque 7.4.10 *Les valeurs propres du système* $\mathbf{SL}(q,\alpha,\beta)$ *sont toutes simples.*

Preuve. Quitte à remplacer la fonction q par $q+\lambda$, il suffit de traiter le cas de la valeur propre 0. On doit donc montrer que si u et v sont deux fonctions de $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$ solutions de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$, alors u et v sont liées. Mais ceci est évident, car si u et v n'étaient pas liées, elles formeraient une base de l'espace des solutions de $y'' - qy = 0$, donc toutes les solutions de cette équation vérifieraient les conditions aux limites $(*)_{\alpha,\beta}$, ce qui n'est pas le cas. □

Notons pour finir que la preuve de 7.4.5 contient le résultat suivant, qu'il n'est pas difficile de démontrer directement.

Proposition 7.4.11 *Soit* $q : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ *une fonction continue, et soient* u, v *deux solutions de l'équation différentielle* $y'' - qy = 0$. *Soit* $K : [a\,;b] \times [a\,;b] \to \mathbb{C}$ *la fonction définie par*

$$K(x,y) = u(\min(x,y)) \times v(\max(x,y))\,.$$

Si $g : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ *est une fonction continue, alors la fonction* f *définie par*

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^b K(x,y)g(y)\,dy \\ &= v(x)\int_a^x u(y)g(y)\,dy + u(x)\int_x^b v(y)g(y)\,dy \end{aligned}$$

est solution de l'équation différentielle $y'' - qy = Wg$, *où* W *est la* constante $uv' - u'v$.

La proposition s'applique par exemple à $K(x,y) = \min(x,y)$ et à $K(x,y) = e^{-|x-y|}$: dans le premier cas, on prend $u(t) = t$, $v = \mathbf{1}$ et $q = 0$; dans le deuxième cas, on prend $u(t) = e^{-t}$, $v(t) = e^t$ et $q = \mathbf{1}$. On dit que l'opérateur T_K associé à un noyau K du type précédent est un *opérateur de Sturm-Liouville.*